

数学系 入学試験問題

数学 I

- ⊗ [1] から [7] までの全問を解答せよ.
- ⊗ 解答時間は 4 時間 である.
- ⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 計算用紙をその下に揃え, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

- 1 実数を係数とする高々 n 次の一変数多項式全体のなすベクトル空間を V_n で表す. 一次変換 $\phi: V_n \rightarrow V_n$ を $\phi(f) = f'$ (f' は f の導関数) で定めるとき, ϕ の階数を求めよ.

- 2 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$$

を満たすとする. このとき,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$$

を示せ.

- 3 正定値実 n 次対称行列 A と正の実数 λ について,

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = \lambda x\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^2x = \lambda^2 x\}$$

を示せ.

- 4 x を変数とする函数項級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+x^2}$$

は \mathbb{R} で一様収束することを示せ.

- 5 \mathbb{Z} 上の n 変数多項式環から \mathbb{Q} への環準同型写像は, 全射でないことを示せ.

- 6 \mathbb{R}^n 上定義された実数値 C^∞ 級函数 $f(x)$ が, すべての $k \in \mathbb{Z}^n$ について $f(x+k) = f(x)$ を満たすとする. このとき,

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) = 0$$

となるような点 $a \in \mathbb{R}^n$ が存在することを示せ.

- 7 次の複素線積分の値を求めよ.

$$\int_C \frac{dz}{\sin(z^2)}$$

ここで C は円周 $|z-i| = \frac{3}{2}$ を正の向きに一周する積分路とする.