平成18年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は８題あり，次の４つの分野群に分かれる．分野群［A］の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題，分野群［B］の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題，分野群［C］の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題，分野群［D］の問題は $\boxed{8}$ の１題である．

⊗　この８問題中，<u>３問題</u>を <u>２つ以上の分野群</u>から選択して解答せよ．

⊗　解答時間は <u>４時間</u> である．

⊗　参考書·ノート類の持ち込みは <u>禁止</u> する．

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと．
2. 解答用紙·計算用紙のすべてに，受験番号·氏名を記入せよ．
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき，記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ は有理数係数の既約な 5 次の多項式とする．K を $f(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とする．K の部分体 F があって， $f(X)$ は $F[X]$ において 2 次の既約多項式と 3 次の既約多項式の積に分解したとする．

このとき $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong S_5$ または $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong A_5$ であることを示せ．ここに S_5 は 5 次対称群， A_5 は 5 次交代群を表す．

$\boxed{\mathbf{2}}$ p は素数とする．R は単位元をもつ環で元の個数が p^2 であるとする．

このとき次の問に答えよ．

(1) R は可換であることを示せ．

(2) R はどのような環になるか，同型類を全て記述せよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $n \geq 2$とし，$\mathbb{R}^{2n}$ の n 次元アフィン部分空間 L_i $(i = 1, 2, 3)$ が次の条件 (A),(B) をみたすとする．

(A) 任意の $i \neq j$ に対して，L_i と L_j はちょうど 1 点で交わる．

(B) $L_1 \cap L_2 \cap L_3 = \emptyset$.

このとき次の問に答えよ．

(1) $\mathbb{R}^{2n} \setminus (L_1 \cup L_2)$ の整係数ホモロジー群をもとめよ．

(2) $\mathbb{R}^{2n} \setminus (L_1 \cup L_2 \cup L_3)$ の整係数ホモロジー群をもとめよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 2 次元球面と直線の直積 $S^2 \times \mathbb{R}$ を考え，$\mathbb{R}$ の座標を s とする．$t \in [0, 1]$ に連続に依存する，$S^2 \times \mathbb{R}$ 上の連続なベクトル場 V_t が，次の条件をみたすとする．

$(*)$ $\quad V_0 = \frac{\partial}{\partial s}, \quad V_1 = -\frac{\partial}{\partial s}.$

このとき，S^2 上の点 p と $t \in [0, 1]$ で，$V_t(p, 0) = 0$ となるものが存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $f,\ f_n,\ g \in L^2(\mathbb{R})\ (n = 1, 2, \ldots)$ に対し，$\sup_{n\geq 1} \|f_n\|_2 < \infty$，かつ殆ど至る所 $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ となることを仮定する．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \|(f_n - f)g\|_1 = 0$$

を示せ．但し，$\|\cdot\|_p$ は $L^p(\mathbb{R})$ のノルムを表す．

$\boxed{\mathbf{6}}$ 実数 $p > 0$ を固定し，$[0,\infty)$ 上の二乗可積分函数全体の空間 $L^2[0,\infty)$ 上で，次の作用素 T を考える．

$$(Tf)(t) = \int_0^\infty \exp(-tx^p) f(x)\ dx \qquad (f \in L^2[0,\infty), \quad t > 0)$$

このとき次の問に答えよ．

(1) $f \in L^2[0,\infty)$ に対して $(Tf)(t)$ は $t > 0$ で連続であり，かつ

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2p}} (Tf)(t) = 0$$

であることを示せ．

(2) 作用素 T は $L^2[0,\infty)$ から $C_b[1,\infty)$ へのコンパクト作用素であることを示せ．但し，$C_b[1,\infty)$ は

$$\|\varphi\| = \sup_{t\in[1,\infty)} |\varphi(t)|$$

をノルムとする $[1,\infty)$ 上の有界連続函数全体からなる Banach 空間とする．

$\boxed{\mathbf{7}}$ 以下で函数はすべて実数値とし，$\mathbb{R}$ 上の連続函数 f は

$$f(x) = 0 \qquad (|x| \geq 1)$$

をみたすものとする．$\mathbb{R}$ 上の常微分方程式の境界値問題

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2u}{dx^2} + u = f, \quad x \in \mathbb{R}, \\ u(x) \to 0 \qquad (x \to \pm\infty) \end{cases}$$

を考える．このとき，この境界値問題に対し，C^2 級の解 u が一意的に存在し，不等式

$$\int_{\mathbb{R}} \left\{ \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + u^2 \right\} dx \leq \int_{\mathbb{R}} f^2\ dx$$

をみたすことを示せ．

$\boxed{8}$ Prog を以下で定めるプログラム P 全体からなる集合とする．

$$P \ ::= \ \mathbf{I} \mid \mathbf{Z} \mid \mathbf{S} \mid \mathbf{N} \mid \mathbf{W}\{P\} \mid P;P$$

また，$\mathit{Prog} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 上の関係 $\langle P, n\rangle \to m$ を，以下の導出規則をみたす最小の関係と定義する．

$$\frac{}{\langle \mathbf{I}, n\rangle \to n} \qquad \frac{}{\langle \mathbf{Z}, n\rangle \to 0} \qquad \frac{}{\langle \mathbf{S}, n\rangle \to n+1} \qquad \frac{}{\langle \mathbf{N}, n\rangle \to -n}$$

$$\frac{}{\langle \mathbf{W}\{P\}, n\rangle \to n} \ \ n < 0 \text{ のとき} \qquad \frac{\langle P; \mathbf{W}\{P\}, n\rangle \to m}{\langle \mathbf{W}\{P\}, n\rangle \to m} \ \ n \geq 0 \text{ のとき}$$

$$\frac{\langle P, n\rangle \to n' \qquad \langle P', n'\rangle \to m}{\langle P; P', n\rangle \to m}$$

このとき，任意のプログラム $P, P' \in \mathit{Prog}$ および任意の $n, m \in \mathbb{Z}$ について以下の命題が成り立つことを証明せよ．

$$\langle P[\mathbf{Z}; \mathbf{W}\{\mathbf{I}\}], n\rangle \to m \quad \text{ならば} \quad \langle P[P'], n\rangle \to m$$

ただし，$P[Q]$ はプログラム P 中のすべての $\mathbf{I}$ の出現をプログラム Q で置き換えて得られるプログラムを表すものとする．