平成22年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

⊗　問題は８題あり, 次の４つの分野群に分かれる. 分野群 [A] の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題, 分野群 [B] の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題, 分野群 [C] の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題, 分野群 [D] の問題は $\boxed{8}$ の１題である.

⊗　この８問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

⊗　解答時間は ４時間 である.

⊗　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

［注意］

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，解答用紙を問題番号順に重ね，計算用紙をその下に揃え，選択表を上におき, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体（0は含まない）, 整数の全体, 有理数の全体，実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{\mathbf{1}}$ 複素数体 $\mathbb{C}$ の部分体 K を $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-17-4\sqrt{17}})$ によって定める．このとき $K/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であることを示し，Galois 群 $Gal(K/\mathbb{Q})$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\mathbb{C}[x,y,z]$ を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の 3 変数多項式環とし，$R = \mathbb{C}[x,y,z]/(y^3 - x^2 z)$ とおく．

次の問（1），（2），（3）に答えよ．

（1）R は整域であることを示せ．

（2）R の商体 Q は $\mathbb{C}$ 上純超越拡大であることを示せ．

（3）R の Q における整閉包 $\tilde{R}$ を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ $S^2 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$ を 2 次元単位球面とし，$D^3 = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ を 3 次元単位球体とする．写像 $g : S^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$g(x,y,z) = (x^2-y^2, 2xy, z\sqrt{2-z^2})$$

で定める．

連続写像 $f : D^3 \to \mathbb{R}^3$ について，その S^2 への制限が g と一致するとき，$f(x_0,y_0,z_0) = (0,0,0)$ となる $(x_0,y_0,z_0) \in D^3$ が存在することを示せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ n を 2 以上の自然数とする．このとき 2 次元球面上の相異なる n 個の点 $P_1, \ldots, P_n$ を選び，それらを同一視して得られる空間 X の整係数ホモロジー群を計算せよ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathbb{R}$ 上の非負可積分関数の列とする．このとき，ある実数 K が存在して

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx \leq K$$

が成り立つならば，ほとんど至る所

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log f_n(x) \leq K$$

が成立することを示せ．ただし $\log 0 = -\infty$ とする。

6 $H = L^2([0,2])$ とおき，H 上の線型作用素 T を，$f \in H$ に対して

$$Tf(x) = \int_0^x f(t)dt$$

で定める．このとき，$I - T$ は H から H への全単射写像であることを示せ．ただし，I は H 上の恒等作用素とする．

7 （1）有界連続関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ と $t > 0, x \in \mathbb{R}$ に対して、極限

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{-t|\xi| - \varepsilon|y| + i(x-y)\xi} f(y) dy d\xi$$

が存在することを示せ．

（2）上の極限を $u(t,x)$ とおくと，$u(t,x)$ は $t > 0, x \in \mathbb{R}$ で

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

を満たす C^∞ 級関数であり、$t \to +0$ のとき $f(x)$ へ $\mathbb{R}$ 上広義一様収束することを示せ．

8 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を非負整数の集合とする．$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$\left[\frac{n}{2}\right]$ を $\frac{n}{2}$ の整数部分とし，$n \bmod 2$ を n を 2 で割ったときの余りとする．また、関数 $\gamma : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を以下のように定義する．

$$\begin{array}{lcll}
\gamma(x, 0) & = & 0 & \\
\gamma(x, n+1) & = & 2 \times \gamma(x, n) & (x < 2^n \text{ のとき}) \\
\gamma(x, n+1) & = & 2 \times \gamma(2^{n+1} - x - 1, n) + 1 & (x \geq 2^n \text{ のとき})
\end{array}$$

このとき、以下に示すプログラム

$G := 0; K := 0;$
while $K < N$ **do**

$$G := G \times 2 + \left((B \bmod 2) - \left(\left[\frac{B}{2}\right] \bmod 2 \right) \right)^2;$$

$$B := \left[\frac{B}{2}\right];\ K := K + 1$$

done

が次の性質を満たすことを示せ．

任意の $b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について，上記プログラムを初期条件

$$N \geq 0 \land B = b \land 0 \leq b < 2^N$$

の下で実行したとき，プログラムが停止した時には

$$G = \gamma(b, N)$$

が成立する．

ただし，上記プログラムのループ不変条件は何であるかを明示し，それが実際に不変条件であることを証明すること．