平成23年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 入学試験問題

数学 II

$\otimes$　問題は８題あり, 次の４つの分野群に分かれる. 分野群 [A] の問題は $\boxed{1}$ と $\boxed{2}$ の２題, 分野群 [B] の問題は $\boxed{3}$ と $\boxed{4}$ の２題, 分野群 [C] の問題は $\boxed{5}$ から $\boxed{7}$ の３題, 分野群 [D] の問題は $\boxed{8}$ の１題である.

$\otimes$　この８問題中, ３問題 を ２つ以上の分野群 から選択して解答せよ.

$\otimes$ 解答時間は ４時間 である.

$\otimes$　参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する.

[注意]

1. 指示のあるまで開かぬこと.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに, 受験番号 · 氏名を記入せよ.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い, 問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 解答用紙を問題番号順に重ね, 計算用紙をその下に揃え, 選択表を上におき, 記入した面を外にして一括して二つ折にして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す. また, $\mathbb{R}^n$ の元 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ に対して $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ と書く.

$\boxed{1}$ $p \geq 3$ を奇素数, $\mathbb{F}_p$ を p 個の元からなる有限体とする. $\mathbb{F}_p$ の元を成分とする正則な 2 次正方行列全体のなす群を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ とおく.

(1) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の元で固有値がすべて 1 となるものの個数を求めよ.

(2) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ の半単純でない元の個数を求めよ.
ただし, $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ が 半単純とは, $\mathbb{F}_p$ の代数的閉包 $\overline{\mathbb{F}_p}$ の元を成分とする正則な 2 次正方行列 P が存在して $P^{-1}AP$ が対角行列となることである.

$\boxed{2}$ 複素数体の部分体 K を $K = \mathbb{Q}(\sqrt{17+4\sqrt{17}}\,i)$ によって定める.

(1) K は $\mathbb{Q}$ の 4 次の Galois 拡大体であることを示せ.

(2) K の $\mathbb{Q}$ 上の Galois 群 $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ を求めよ.

$\boxed{3}$ n を 1 以上の整数とし, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ とする. また, 0 でない実数 a に対して $a/|a|$ を a の符号と呼ぶことにする.

C^∞ 級写像 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ は原点 O を正則値にもつとする. すなわち, 任意の $x \in f^{-1}(O)$ における f の微分 df_x は非退化である.

(1) $f^{-1}(O) = \{O\}$ をみたすとき写像

$$F : S^n \to S^n$$

を

$$F(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \quad (x \in S^n)$$

で定める. このとき F の写像度が $\det(df_O)$ の符号に等しいことを示せ.

(2) $f^{-1}(O) = \{P, Q\}$ $(P \neq Q)$ で $\max\{|P|, |Q|\} < 1$ をみたすとする. 写像

$$F : S^n \to S^n$$

を

$$F(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} \quad (x \in S^n)$$

で定めるとき, F の写像度が $\det(df_P)$ の符号と $\det(df_Q)$ の符号の和になることを示せ.

$\boxed{4}$ 境界つき多様体 M の境界を ∂M と書く. D を 2 次元単位閉円板, I を閉区間 $[0,1]$ とし, I において 0 と 1 を同一視した商空間を 1 次元トーラス T^1 とし, 通常の可微分構造を考える. 同相写像 $h_1 : \partial D \to T^1$ を 1 つ与える.

(1) 3 次元トーラス $T^3 = T^1 \times T^1 \times T^1$ の境界つき部分多様体で 3 次元単位閉球体に可微分同相なものを $\overline{B_1}, \overline{B_2}$ とし, これらは $\overline{B_1} \cap \overline{B_2} = \emptyset$ をみたすとする. また $\overline{B_1}, \overline{B_2}$ の内部を B_1, B_2 とする.

$$X = T^3 \setminus (B_1 \cup B_2)$$

とおくとき X の有理係数ホモロジー群を求めよ.

(2) $x, y \in \partial(I \times I) = \big(\{0,1\} \times I\big) \cup \big(I \times \{0,1\}\big)$ のとき $x \sim_1 y$ とする. これにより $I \times I$ に同値関係 $\sim_1$ を定める. 商空間 $I \times I / \sim_1$ を S^2 とし, $T^2 = T^1 \times T^1$ とする. これにより, 自然な写像 $f : T^2 \to S^2$ を与える. 同相写像 $h_2 : S^2 \to \partial(T^3 \setminus B_1)$ を 1 つ与え, 次の合成写像を g とする.

$$\partial(T^1 \times D) = T^1 \times \partial D \xrightarrow{\mathrm{id}_{T^1} \times h_1} T^2 \xrightarrow{f} S^2 \xrightarrow{h_2} \partial(T^3 \setminus B_1) \hookrightarrow \partial X.$$

この g を用いて $x \in \partial(T^1 \times D)$, $y = g(x)$ のとき $x \sim_2 y$ とする. これにより $X \sqcup (T^1 \times D)$ に同値関係 $\sim_2$ を定める.
商空間 $Y = X \sqcup (T^1 \times D) / \sim_2$ の有理係数ホモロジー群を求めよ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{R}^3$ 上の Lebesgue 可測な実数値函数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が次の条件 (1),(2) を満たすとする.

(1) 任意の $3/2 \le p \le 3$ に対して

$$\sup_{n \ge 1} \|f_n\|_p < \infty.$$

(2) 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^3$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} \int_K |f_n(x)| dx = 0.$$

このとき

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|f_n(x)|}{|x|^{3/2}} dx = 0$$

となることを示せ.

ただし dx は 3 次元 Lebesgue 測度であり

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

とする.

$\boxed{6}$ $[0,\infty)$ 上の実数値有界連続函数全体に, ノルム

$$\|f\| = \sup_{x\geq 0} |f(x)|$$

を与えた Banach 空間を B とする. 実 Hilbert 空間 $L^2([0,\infty))$ から B への線型作用素 T を

$$Tf(x) = \frac{1}{1+x}\int_0^x f(y)dy, \quad x \in [0,\infty)$$

と定める. T はコンパクト作用素であることを示せ.

$\boxed{7}$ $f(x,y)$, $g(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級函数で

$$xf(x,y) + yg(x,y) \leq (1+x^2+y^2)\sqrt{\log(1+x^2+y^2)}$$

を満たすものとする. このとき常微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

は, 任意の $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $t \in [0,\infty)$ で定義され $x(0)=x_0, y(0)=y_0$ をみたす解 $(x(t),y(t))$ を持つことを示せ.

$\boxed{8}$ 二分木の集合 B を以下を満たす最小の集合とする.

(a) $\mathsf{Lf} \in B$.
(b) $l, r \in B$ ならば $\mathsf{Nd}(l,r) \in B$.

関数 $f_0 : B \times B \to B$ および再帰関数 $g : B \to B$, $f_1 : B \times B \to B$ を以下のように定義する.

$$\begin{aligned}
f_0(t,\mathsf{Lf}) &= \mathsf{Nd}(\mathsf{Nd}(\mathsf{Lf},t),\mathsf{Lf}) \\
f_0(t,\mathsf{Nd}(l,r)) &= \mathsf{Nd}(\mathsf{Nd}(l,t),r)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g(\mathsf{Lf}) &= \mathsf{Lf} \\
g(\mathsf{Nd}(\mathsf{Lf},r)) &= \mathsf{Nd}(\mathsf{Lf},r) \\
g(\mathsf{Nd}(\mathsf{Nd}(l_1,r_1),r)) &= g(\mathsf{Nd}(l_1,\mathsf{Nd}(r_1,r)))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_1(t,\mathsf{Lf}) &= \mathsf{Lf} \\
f_1(t,\mathsf{Nd}(\mathsf{Lf},\mathsf{Lf})) &= \mathsf{Lf} \\
f_1(t,\mathsf{Nd}(\mathsf{Nd}(l_1,r_1),\mathsf{Lf})) &= f_1(t,g(\mathsf{Nd}(\mathsf{Nd}(l_1,r_1),\mathsf{Lf}))) \\
f_1(t,\mathsf{Nd}(l,\mathsf{Nd}(l_2,r_2))) &= \mathsf{Nd}(l,r_2)
\end{aligned}$$

任意の $t_1, \cdots, t_n \in B$ および $b_1, \cdots, b_n \in \{0, 1\}$ $(n \geq 1)$ に対して, $s_0, s_1, \cdots, s_n \in B$ を

$$s_0 = \mathsf{Lf}, \qquad s_k = f_{b_k}(t_k, s_{k-1}) \ (1 \leq k \leq n)$$

で定めるとき, s_0 から s_n を計算するのに要する関数 f_0, g, および f_1 の呼び出し回数 (再帰呼び出しも含む) の総和が高々$O(n)$ であることを証明せよ.