平成 26 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2014 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学

Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ． Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は 3 時間 である．The duration of the examination is three hours.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと． The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

[注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かないこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may take home this problem sheet.

[記号 (Notations)]

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，実数の全体，複素数の全体を表す．

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$, and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ a, b, c, d, e, f を複素数とする．2 つの 4 次複素正方行列

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

が相似であるための必要十分条件を求めよ．ただし，A と B が相似であるとは，正則な 4 次複素正方行列 P であって, $P^{-1}AP = B$ をみたすものが存在することをいう.

$\boxed{\mathbf{2}}$ 次の広義積分の値を求めよ:

$$\iint_D \frac{|x-y|}{(x^2+y^2+1)^2} dx\, dy, \qquad \text{ただし} \quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathbb{C}[x]$ を $\mathbb{C}$ 上の 1 変数多項式環，$I = (x^2(x+1))$ を $x^2(x+1)$ で生成されたイデアルとする．$\mathbb{C}[x]/I$ から $\mathbb{C}$ への環準同型 ϕ で $a \in \mathbb{C}$ なら $\phi(a) = a$ であるものをすべて求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ 正の整数 n に対し, $C_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ とする．$\mathbb{R}^2$ の部分空間

$$X = \{(0, 0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

がコンパクトであることを示せ.

$\boxed{\mathbf{5}}$ ξ を実数とするとき, 次の積分の値を求めよ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{(x^2+1)^2} dx.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Let a, b, c, d, e, f be complex numbers. Determine when the complex matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

are similar. Here, A and B are said to be similar if there exists an invertible complex matrix P satisfying $P^{-1}AP = B$.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Compute the following integral:

$$\iint_D \frac{|x-y|}{(x^2+y^2+1)^2} dx\, dy, \qquad \text{where} \;\; D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; x \geq 0, y \geq 0\}.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Let $\mathbb{C}[x]$ be the polynomial ring in one variable over $\mathbb{C}$, and $I = (x^2(x+1))$ its ideal generated by $x^2(x+1)$. Determine all ring homomorphisms ϕ from $\mathbb{C}[x]/I$ to $\mathbb{C}$ such that $\phi(a) = a$ for all $a \in \mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Let $C_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\; x^2+y^2 = \frac{1}{n^2}\}$ for positive integers n. Show that the subspace

$$X = \{(0,0)\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$$

of $\mathbb{R}^2$ is compact.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Let ξ be a real number. Compute the following integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\xi x}}{(x^2+1)^2} dx.$$