平成 27 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目 II

◎　問題は 7 題ある．数学系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$の 5 題を解答せよ．数理解析系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{3}$の 3 題を解答し, さらに, $\boxed{4}$〜$\boxed{7}$のうちの 2 題を選択して解答せよ. (数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 5 題であり, 両系をともに志望している者の解答問題数は, 選択によって 5〜7 題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること.

◎　解答時間は 3 時間 である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する. 指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 選択票, 答案用紙（問題番号順）, 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ $f(x)$, $\phi(x)$ は区間 $[0,\infty)$ 上の実数値連続関数とし，さらに $\phi(x)$ は

$$\phi(x) = \phi(x+1) \quad (x \geq 0),$$
$$\int_0^1 \phi(x)\,dx = 1$$

をみたすとする．このとき，任意の実数 $a > 0$ に対し，

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^a f(x)\phi(\lambda x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{2}$ n を正の整数とし，A を n 次実正方行列で，交代行列であるとする．すなわち A の転置行列 ${}^tA$ が $-A$ に一致するとする．このとき，以下の問に答えよ．

(i) 任意の列ベクトル $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$ に対し $\|(E-A)\mathbf{u}\| \geq \|\mathbf{u}\|$ が成立することを示せ．ただし E は単位行列であり，$\|\mathbf{u}\|$ はユークリッドノルム $\sqrt{{}^t\mathbf{u}\mathbf{u}}$ である．

(ii) $E-A$ は正則行列であり，$(E+A)(E-A)^{-1}$ は直交行列となることを示せ．

$\boxed{3}$ a を正の実数とするとき，次の広義積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+a^2)^2}\,dx.$$

$\boxed{4}$ 1 以上 3500 以下の整数 x のうち，x^3+3x が 3500 で割り切れるものの個数を求めよ．

$\boxed{5}$ 2次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上の関数

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx$$

の臨界点をすべて求め，それらが非退化かどうかも答えよ．

ただし，$p \in S^2$ が f の臨界点であるとは，S^2 の p のまわりの局所座標 (u, v) に関して

$$\frac{\partial f}{\partial u}(p) = \frac{\partial f}{\partial v}(p) = 0$$

となることである．また，f の臨界点 p は

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial u^2}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial u \, \partial v}(p) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial v \, \partial u}(p) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial v^2}(p) \end{pmatrix}$$

が正則行列であるとき非退化であるという．なおこれらの定義は (u, v) のとり方にはよらない．

$\boxed{6}$ a は実数で $0 < a < \frac{1}{4}$ とする．このとき，区間 $(0, \infty)$ における常微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x^2} y = 0$$

の任意の解 $y(x)$ は $\displaystyle\lim_{x \to +0} y(x) = 0$ をみたすことを示せ．

$\boxed{7}$ A を実正方行列とする．このとき，ある正の整数 k が存在して $\mathrm{tr}(A^k) \geq 0$ となることを示せ．ただし tr は行列のトレースを表す．