平成 27 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2015 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学
Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ．　Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は 3 時間 である．The duration of the examination is three hours.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書・ノート類の持ち込みは 禁止 する．It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

［注意 (Cautions)］

1. 指示のあるまで開かないこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙・計算用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may take home this problem sheet.

［記号 (Notations)］

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，実数の全体，複素数の全体を表す.

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を複素数とする．以下の複素行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

可逆な 3 次複素正方行列 P であって，$P^{-1}AP = B$ を満たすものは，いつ存在するか.

$\boxed{\mathbf{2}}$ $\{f_n\}$ を開区間 $(0,1)$ 上の微分可能な関数の列で，任意の $x \in (0,1)$ と任意の正整数 n に対し，

$$|f_n'(x)| \leq 1$$

が満たされているとする．$\{f_n\}$ が f に $(0,1)$ で各点収束するとき，$\{f_n\}$ は f に $(0,1)$ で一様収束することを示せ.

$\boxed{\mathbf{3}}$ $\mathbb{R}[x]$ を $\mathbb{R}$ 上の 1 変数多項式環とする．I を多項式 $x^3 - 8$ で生成された $\mathbb{R}[x]$ のイデアルとする．剰余環を $A = \mathbb{R}[x]/I$ とおく．環 A の元 a であって，$a^4 - 1 = 0$ を満たすものの個数を求めよ.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とおき，写像 $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x,y,z) = (yz - x, zx - y, xy - z)$$

で定める．このとき f の特異点をすべて求めよ．ここで，$p \in S^2$ における f の微分

$$df_p\colon T_pS^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}^3$$

の階数が 2 より小さいとき，p を f の特異点という.

$\boxed{\mathbf{5}}$ 次の積分の値を求めよ.

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\,dx.$$

1 Let a be a complex number. Consider the following complex matrices.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 3 & 0 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Determine when there exists an invertible 3×3 complex matrix P satisfying $P^{-1}AP = B$.

2 Let $\{f_n\}$ be a sequence of differentiable functions on the open interval $(0,1)$ such that for any $x \in (0,1)$ and any positive integers n,

$$|f_n'(x)| \leq 1.$$

Prove that if $\{f_n\}$ converges to f pointwise on $(0,1)$, then $\{f_n\}$ converges to f uniformly on $(0,1)$.

3 Let $\mathbb{R}[x]$ be the polynomial ring in one variable over $\mathbb{R}$. Let I be the ideal of $\mathbb{R}[x]$ generated by the polynomial $x^3 - 8$. Consider the quotient ring $A = \mathbb{R}[x]/I$. Find the number of elements a of the ring A satisfying $a^4 - 1 = 0$.

4 Set $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, and define a map $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^3$ by

$$f(x,y,z) = (yz - x, zx - y, xy - z).$$

Determine all the singular points of f. Here $p \in S^2$ is called a singular point of f if the rank of the differential of f at p

$$df_p\colon T_pS^2 \to T_{f(p)}\mathbb{R}^3$$

is less than 2.

5 Compute the following integral:

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}\, dx.$$