平成 28 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目 II

◎　問題は 7 題ある．数学系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{5}$の 5 題を解答せよ．数理解析系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{3}$の 3 題を解答し, さらに, $\boxed{4}$〜$\boxed{7}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 5 題であり, 両系をともに志望している者の解答問題数は, 選択によって 5〜7 題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は 3 時間 である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は, 選択票, 答案用紙（問題番号順）, 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 自然数の全体, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 次の積分が収束するような実数 α の範囲を求めよ.

$$\iint_D \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$$

ただし，$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -\infty < x < \infty,\ 0 < y < 1\right\}$ とする.

$\boxed{2}$ A と B を複素 3 次正方行列とする．A の最小多項式は x^3-1，B の最小多項式は $(x-1)^3$ とする．このとき，

$$AB \neq BA$$

となることを示せ.

$\boxed{3}$ 複素関数 $f(z)$ は $z=0$ の近傍で正則な関数で $f(z)e^{f(z)} = z$ をみたすとする．以下の問に答えよ.

(i) 非負整数 n と十分小さい正数 ε に対して次の式が成り立つことを示せ.

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\varepsilon} \frac{1+u}{e^{nu}u^n}du.$$

ここで積分路 C_ε は円周 $C_\varepsilon = \{u \in \mathbb{C} \mid |u| = \varepsilon\}$ を正の向きに一周するものとする.

(ii) $f(z)$ の $z=0$ におけるベキ級数展開を求め，その収束半径を求めよ.

$\boxed{4}$ 正則な複素 2 次正方行列のなす群を $GL_2(\mathbb{C})$ とおく．行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で生成される $GL_2(\mathbb{C})$ の部分群 G について，以下の問に答えよ.

(i) 群 G の位数を求めよ.

(ii) 群 G の中心の位数を求めよ．ただし，G の中心とは，G のすべての元と可換な元全体のなす G の部分群のことである.

(iii) 群 G に含まれる位数 2 の元の個数を求めよ.

$\boxed{5}$ 3 次元微分可能多様体 $M = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid xy - z^2 = w\}$ から $\mathbb{R}^3$ への写像 $f = (f_1, f_2, f_3) : M \to \mathbb{R}^3$ を

$$f(x, y, z, w) = (x + y, z, w)$$

により定める. 以下の問に答えよ.

(i) f の臨界点の集合 C を求めよ. ただし $p \in M$ が f の臨界点であるとは, p のまわりの M の座標系 (u_1, u_2, u_3) に関する f のヤコビ行列

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}(p)\right)_{1 \leq i, j \leq 3}$$

が正則でないことである.

(ii) C が M の部分多様体になることを証明せよ.

$\boxed{6}$ $A(z) = (a_{jk}(z))_{1 \leq j, k \leq N}$ を N 次正方行列, $D = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\big\}$ を単位円板, m を正の整数とし, 以下の (A), (B) を仮定する.

(A) 各 $a_{jk}(z)$ は D 上の正則関数である.

(B) $\det A(z)$ は $z = 0$ に m 位の零点をもつ.

このとき, 十分に小さい正数 ε に対して, 次式が成り立つことを示せ.

$$m = \operatorname{tr}\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C_\varepsilon} A(z)^{-1} \frac{d}{dz} A(z)\, dz\right)$$

ここで積分路 C_ε は円周 $C_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \varepsilon\}$ を正の向きに一周するものとし, $\operatorname{tr}(X)$ は行列 X のトレース (trace) を表す.

$\boxed{7}$　次のどちらか 1 問に答えよ．

$\boxed{\text{A}}$ n 次正方行列 A を次式で定める．

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \text{\Large 0} \\ & 0 & 1 & & & \\ & & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

すなわち，A の $(i, i+1)$ 成分 $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ は 1 であり，(n, j) 成分 $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は -1 であり，その他の成分は 0 である．このとき A^{n+1} は単位行列に等しいことを示せ．

$\boxed{\text{B}}$ 正の実数 a に対して，次の 5 つの実数を考える．

$$\begin{aligned} A_1 &= ((a \,^\wedge\, a) \,^\wedge\, a) \,^\wedge\, a \\ A_2 &= (a \,^\wedge\, a) \,^\wedge\, (a \,^\wedge\, a) \\ A_3 &= (a \,^\wedge\, (a \,^\wedge\, a)) \,^\wedge\, a \\ A_4 &= a \,^\wedge\, ((a \,^\wedge\, a) \,^\wedge\, a) \\ A_5 &= a \,^\wedge\, (a \,^\wedge\, (a \,^\wedge\, a)) \end{aligned}$$

ただし，正の実数 b, c に対し $b \,^\wedge\, c = b^c$ と定める．以下の問に答えよ．

(i) $a > 2$ のとき，A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の大小関係を調べよ．

(ii) $0 < a < 1$ のとき，A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 の大小関係を調べよ．