平成 28 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2016 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学

Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ．　Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は <u>3 時間</u> である．The duration of the examination is <u>three hours</u>.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと． The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは <u>禁止</u> する．It is <u>not allowed</u> to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

[注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かないこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may take home this problem sheet.

[記号 (Notations)]

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ はそれぞれ，実数の全体，複素数の全体, 整数の全体を表す．

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$, the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$, and the set of all integers by $\mathbb{Z}$.

1 次の実 4×5 行列を考える．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 15 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -18 & -1 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

線形写像 $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ を $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ で定める．f_A の核と像の基底を一組ずつ求めよ．

2 実数列 $\{a_n\}$ が

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \alpha > 0$$

を満たすとする．また $[0, \infty)$ 上の実数値連続関数 $f(x)$ が

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k$$

を満たしているとする．このとき次の極限を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty f(x) e^{-a_n x} dx.$$

3 $\mathbf{v}_1 = (9, 4, 5)$, $\mathbf{v}_2 = (7, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 6, 7)$ とし，商群

$$G = \mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_3)$$

を考える．群 G の位数 2 の元の個数を求めよ．

4 $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト部分集合 A と正の数 ϵ に対し，

$$U_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} < \epsilon\}$$

とおき，$\mathbb{R}^n$ の 2 つの空でないコンパクト部分集合 A と B に対して

$$d_H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset U_\epsilon(B) \text{ かつ } B \subset U_\epsilon(A)\}$$

と定める．ただし $d(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ は x と y のユークリッド距離である．このとき $\mathbb{R}^n$ の空でないコンパクト部分集合 A, B, C に対して次のことを示せ．

1. $d_H(A, B) = 0$ ならば A と B は $\mathbb{R}^n$ の部分集合として一致する．
2. $d_H(A, C) \le d_H(A, B) + d_H(B, C)$.

5 次の極限を求めよ．

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x \sin(2\pi x)}{1 + x + x^2}\, dx.$$

$\boxed{1}$ Consider the following real 4×5 matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 15 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -18 & -1 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Define a linear map $f_A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ by $f_A(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$. Find a basis of the null space of f_A and a basis of the image of f_A, respectively.

$\boxed{2}$ Let $\{a_n\}$ be a sequence of real numbers with

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \alpha > 0$$

and let $f(x)$ be a real-valued continuous function on $[0, \infty)$ with

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = k.$$

Then compute the following limit.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^\infty f(x)e^{-a_n x} dx.$$

$\boxed{3}$ Put $\mathbf{v}_1 = (9, 4, 5)$, $\mathbf{v}_2 = (7, 2, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 6, 7)$, and consider the quotient group

$$G = \mathbb{Z}^3/(\mathbb{Z}\mathbf{v}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_2 + \mathbb{Z}\mathbf{v}_3).$$

Find the number of elements of order 2 in the group G.

$\boxed{4}$ Let A be a nonempty compact subset of $\mathbb{R}^n$, and let ϵ be a positive number. Put

$$U_\epsilon(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} < \epsilon\}$$

and for two nonempty compact subsets A and B of $\mathbb{R}^n$, define

$$d_H(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 \mid A \subset U_\epsilon(B) \text{ and } B \subset U_\epsilon(A)\}.$$

Here $d(x, y)$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ is the Euclidean distance between x and y. Then for nonempty compact subsets A, B, C of $\mathbb{R}^n$, prove the following.

1. If $d_H(A, B) = 0$, then A coincides with B as subsets of $\mathbb{R}^n$.
2. $d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C)$.

$\boxed{5}$ Compute the following limit.

$$\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \frac{x \sin(2\pi x)}{1 + x + x^2} dx.$$