平成 29 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題
専門科目

◎　問題は 12 題ある．数学系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{10}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は, $\boxed{1}$〜$\boxed{12}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 2 題であり, 両系をともに志望している者の解答問題数は, 選択によって 2〜4 題となる.) 選択した問題番号を選択票に記入すること.

◎　解答時間は 2 時間 30 分 である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計 等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと.

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は, 上から選択票, 答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
6. この問題冊子は持ち帰ってよい.

[記号]

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 整数の全体, 有理数の全体, 実数の全体, 複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ G を有限群とする. G の自己同型写像全体のなす群を $\mathrm{Aut}(G)$ とおく. また, G および $\mathrm{Aut}(G)$ の位数をそれぞれ $a = |G|$, $b = |\mathrm{Aut}(G)|$ とおく. 以下の問に答えよ.

(i) $b = 1$ のとき, G は自明群であるか, または $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と同型であることを示せ.

(ii) a が奇数で $b = 2$ となるような G を全て求めよ.

$\boxed{2}$ n は 2 以上の整数とし, $\zeta = e^{2\pi\sqrt{-1}/n}$ を 1 の原始 n 乗根とする. $\mathbb{C}[X, Y]$ は変数 X, Y に関する複素数係数の 2 変数多項式環とする.

$$R = \left\{ f(X,Y) \in \mathbb{C}[X,Y] \;\middle|\; f(\zeta X, \zeta Y) = f(X,Y) \right\}$$

とおく. 以下の問に答えよ.

(i) $\mathbb{C}$ 代数として R は $n+1$ 個の元 X^n, $X^{n-1}Y, \ldots, XY^{n-1}$, Y^n で生成されることを示せ.

(ii) 複素数 a, b, c, d に対し, $m_{a,b} = (X-a,\, Y-b)$, $m_{c,d} = (X-c,\, Y-d)$ を $\mathbb{C}[X,Y]$ のイデアルとする. $m_{a,b} \cap R = m_{c,d} \cap R$ が成り立つための, a, b, c, d に関する必要十分条件を求めよ.

$\boxed{3}$ 以下の問に答えよ.

(i) S_5 を文字 1, 2, 3, 4, 5 に関する対称群とする. S_3 を文字 1, 2, 3 に関する対称群とし, S_3 を S_5 の部分群とみなす. $\sigma = (1\ 2\ 3) \in S_5$ を長さ 3 の巡回置換とし, σ で生成された S_5 の部分群を $G = \langle \sigma \rangle$ とおく. $\tau = (4\ 5) \in S_5$ を互換とし, τ で生成された S_5 の部分群を $H = \langle \tau \rangle$ とおく. S_5 の部分群 G の正規化群を

$$N_{S_5}(G) = \{ \eta \in S_5 \mid \eta G \eta^{-1} = G \}$$

で定める. このとき, $N_{S_5}(G) = S_3 \times H$ であることを示せ.

(ii) $f(X)$ は $\mathbb{Q}$ 係数の 5 次の多項式とする. $K \subset \mathbb{C}$ を $f(X)$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体とする. K は次の条件 $(*)$ を満たすとする.

$(*)$ $[K : F] = 3$ となる K の部分体 F がただ一つ存在する.

このとき, $f(X)$ は $\mathbb{Q}$ 係数の 3 次の既約多項式で割り切れることを示せ.

$\boxed{4}$ $p_1 = (1,0), p_2 = (2,0)$ を $\mathbb{R}^2$ の 2 点とする．以下の問に答えよ．

(i) $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ の実数係数 1 次元コホモロジー群を求めよ．

(ii) $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上の 1 次微分形式を

$$\theta = \frac{x_1 dx_2 - x_2 dx_1}{x_1^2 + x_2^2}$$

で定める．ただし，(x_1, x_2) は $\mathbb{R}^2$ の座標である．写像 $T_i : \mathbb{R}^2 \setminus \{p_i\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ を $T_i(x) = x - p_i$ で定める $(i = 1, 2)$. $\mathbb{R}^2 \setminus \{p_1, p_2\}$ 上の 1 次微分形式 α で，次の条件 (1), (2) を同時に満たすものが存在することを示せ．

(1) $d\alpha = 0$.

(2) 各 $i = 1, 2$ について，p_i の開近傍 U_i が存在して，

$$\alpha|_{U_i \setminus \{p_i\}} = (T_i^* \theta)\,|_{U_i \setminus \{p_i\}}.$$

$\boxed{5}$ $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ とする．D^2 の境界を $\partial D^2 = \{(x,y) \in D^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ で定義する．$S^1 = \{(z,w) \in \mathbb{R}^2 \mid z^2 + w^2 = 1\}$ とする．以下の問に答えよ．

(i) $M = D^2 \times S^1$ とする．M の境界を $\partial M = \partial D^2 \times S^1$ で定義する．M の同値関係 $\sim$ を次の $(*)$ で定める．

$(*)$ $p, q \in M$ について，$p \sim q$ となるのは，$p = q$ または $p, q \in \partial M$ であるとき．

この同値関係による M の商空間 $M/{\sim}$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(ii) $T^3 = S^1 \times S^1 \times S^1$ の部分空間 Y を

$$Y = \{(p,p,p) \mid p \in S^1\}$$

で定義する．このとき，T^3 における Y の補空間 $T^3 \setminus Y$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{6}$ $(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．X 上の非負実数値可積分関数を要素とする集合 $\mathcal{C}$ が次の (A), (B), (C) を満たすと仮定する.

(A) 集合 $\mathcal{C}$ は空でない.

(B) $f, g \in \mathcal{C}$ ならば，$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$, $(x \in X)$ により定まる関数 h も $\mathcal{C}$ に属する.

(C) $M = \sup\left\{\int_X f\,d\mu \mid f \in \mathcal{C}\right\}$ とするとき, M は有限値.

このとき, 以下の問に答えよ.

(i) 次の 2 条件 (1), (2) を同時に満たす X 上の非負実数値可積分関数 φ が存在することを示せ.

(1) すべての $f \in \mathcal{C}$ に対して，$f(x) \le \varphi(x)$ が μ に関してほとんどすべての x について成り立つ.

(2) $\int_X \varphi\,d\mu = M$.

(ii) (i) における φ は次の性質 $(*)$ を持つことを示せ.

$(*)$ $\mu(A) > 0$ なる任意の $A \in \mathcal{F}$ に対して,

$$\sup\left\{\operatorname*{ess\,sup}_A f \;\middle|\; f \in \mathcal{C}\right\} = \operatorname*{ess\,sup}_A \varphi.$$

ここで, $\mu(A) > 0$ なる $A \in \mathcal{F}$ と X 上の非負実数値可測関数 g に対して

$$\operatorname*{ess\,sup}_A g = \inf\left\{\alpha \in \mathbb{R} \;\middle|\; \mu\big(\{x \in A \mid g(x) > \alpha\}\big) = 0\right\}$$

である．ただし $\inf \emptyset = \infty$ とする.

$\boxed{7}$ $L^2(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上 2 乗可積分な関数全体のなす Hilbert 空間とするとき，以下の問に答えよ.

(i) $g \in L^2(\mathbb{R})$ とし，$z \in \mathbb{C}$ に対して

$$F(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2+zx} g(x)dx$$

と定める．このとき, $F(z)$ は $\mathbb{C}$ 上正則であることを示せ.

(ii) 正の整数 n に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = e^{-x^2+\frac{x}{n}}$ と定める．このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の線型結合全体は $L^2(\mathbb{R})$ で稠密であることを示せ.

$\boxed{8}$ C^∞ 級関数 $u\colon \mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)+\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x,t)=t\sin x,\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)$$

および周期境界条件

$$u(x+2\pi,t)=u(x,t),\qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times[0,\infty)$$

を満たすとする．このとき，$t\to\infty$ で $\frac{u(x,t)}{t}$ はある関数 $g(x)$ に $\mathbb{R}$ 上で一様収束することを示し，その関数 $g(x)$ を求めよ．

$\boxed{9}$ 3 次元空間の直交座標を (x,y,z) として, 平行な 2 つの剛体壁 $z=\pm1$ の間に存在する非圧縮性磁気流体を考える. $z=\pm1$ の剛体壁は x 方向にそれぞれ ±1 の速度（複号同順）で動いており, 外部からは z 方向の磁場が加えられているとする. 壁の間の流体の速度場 $\boldsymbol{u}$ と磁場 $\boldsymbol{b}$ は次の方程式 (1), (2) に従うものとして以下の問に答えよ.

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}+(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p+(\nabla\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}+\nu\nabla^2\boldsymbol{u}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t}-\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b})=\lambda\nabla^2\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

ここで p は圧力を表す. ρ, ν, λ はそれぞれ流体の密度, 粘性率, 磁気拡散率を表し, いずれも正の定数である.

(i) 速度場 $\boldsymbol{u}$ と磁場 $\boldsymbol{b}$ はいずれも定常で z のみに依存し, $\boldsymbol{u}=(u(z),0,0)$, $\boldsymbol{b}=(b(z),0,B)$, $p=p(z)$ の形をもつものと仮定する. ここで B は非負定数である. このとき $u(z)$, $b(z)$, $p(z)$ の従う微分方程式を導け.

(ii) 境界条件 $u(\pm1)=\pm1$ (複号同順), $b(\pm1)=0$ の下で $u(z)$ と $b(z)$ を求めよ.

(iii) $\alpha=B/\sqrt{\lambda\nu}$ とおく. $\alpha\ll1$ のとき $u(z)$ を α の 2 次のオーダーまで求めよ.

(iv) $0\le z\le1$ として, $\lim\limits_{\alpha\to\infty}u(z)e^{\alpha(1-z)}$ を求め, $\alpha\gg1$ のときの $u(z)$ のグラフの概形を描け.

$\boxed{10}$ 定数記号 $\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{I}$ と 2 項関数記号 f から生成される項全体の集合を $\mathcal{T}$ とする (変数は含まないものとする). つまり $\mathcal{T}$ は $\mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{I}$ を含み, $M, N \in \mathcal{T}$ ならば $\mathsf{f}(M, N) \in \mathcal{T}$ を満たす最小の集合である.

同様にして, 定数記号 0 と 2 項関数記号 g から生成される項全体の集合を $\mathcal{U}$ とする (同じく変数は含まないものとする). 以後 $\mathsf{g}(a, b)$ のことを $(a \to b)$ と書く. また $(a \to (b \to c))$ を $(a \to b \to c)$ と略記し, $(a \to (b \to (c \to d)))$ を $(a \to b \to c \to d)$ と略記する.

各項 $M_0 \in \mathcal{T}$ に対して集合 $[\![M_0]\!] \subseteq \mathcal{U}$ を次のように帰納的に定める.

$$
\begin{aligned}
[\![\mathsf{B}]\!] &= \{((b \to c) \to (a \to b) \to (a \to c)) \mid a, b, c \in \mathcal{U}\}, \\
[\![\mathsf{C}]\!] &= \{((a \to b \to c) \to (b \to a \to c)) \mid a, b, c \in \mathcal{U}\}, \\
[\![\mathsf{I}]\!] &= \{(a \to a) \mid a \in \mathcal{U}\}, \\
[\![\mathsf{f}(M, N)]\!] &= \{b \mid \text{ある } a \in \mathcal{U} \text{ について } (a \to b) \in [\![M]\!],\ a \in [\![N]\!]\}.
\end{aligned}
$$

以下の各集合 X_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ について, $X_i = [\![M_i]\!]$ となる項 $M_i \in \mathcal{T}$ は存在するかどうか, 理由をつけて答えよ.

$$
\begin{aligned}
X_1 &= \{(0 \to 0)\}, \\
X_2 &= \{(a \to b \to b \to a) \mid a, b \in \mathcal{U}\}, \\
X_3 &= \{(((a \to b) \to b) \to a) \mid a, b \in \mathcal{U}\}, \\
X_4 &= \{((a \to b \to c \to d) \to (c \to b \to a \to d)) \mid a, b, c, d \in \mathcal{U}\}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{11}$ $G = (V, E)$ を有限の頂点集合 V と辺集合 $E \subseteq \binom{V}{2}$ をもつ無向グラフとし, $w \colon E \to \mathbb{R}$ を辺重みとする. このとき, 全域木 $T^* \subseteq E$ に対して, 以下の二つの条件 (A) と (B) が同値であることを示せ.

(A) T^* が重み w に関して最小である. すなわち, 任意の全域木 $T \subseteq E$ に対して, $\sum_{e \in T^*} w(e) \leq \sum_{e \in T} w(e)$ を満たす.

(B) 任意の辺 $f \in E \setminus T^*$ に対して, $w(f) \geq \max_{f' \in C_f} w(f')$ が成立する. ただし, C_f は $T^* \cup \{f\}$ に含まれる唯一の閉路とする.

$\boxed{12}$ 時間に依存するハミルトニアンをもつ量子力学系に関し, 以下の問に答えよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ とおき, $t \in \mathbb{R}$ は時間を表す.

(i) 時間に依存する線形作用素 $A(t)$ の指数関数 $e^{uA(t)}$ $(u \in \mathbb{R})$ が意味をもつとき

$$\frac{d}{dt}e^{uA(t)} = \int_0^u e^{(u-s)A(t)} \left(\frac{d}{dt}A(t)\right) e^{sA(t)} ds$$

が成り立つことを示せ.

(ii) ハミルトニアン $H(t)$ をもつ系の時間発展作用素 $U(t)$ は微分方程式 $i\frac{d}{dt}U(t) = H(t)U(t)$, $U(t_0) = I$ を満たしているものとする. ここで I は恒等作用素である. $H_0(t) = H(t)$ とおき, 作用素 $H_n(t)$, $U_n(t)$ $(n = 1, 2, \dots)$ を順次以下の関係式を満たすように定めれば, 微分方程式 $i\frac{d}{dt}U_n(t) = H_n(t)U_n(t)$, $U_n(t_0) = I$ が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned}
&F_n(t) = -i\int_{t_0}^t H_{n-1}(\tau)d\tau, \\
&H_n(t) = e^{-F_n(t)}H_{n-1}(t)e^{F_n(t)} - \int_0^1 e^{-sF_n(t)}H_{n-1}(t)e^{sF_n(t)}ds, \\
&U(t) = e^{F_1(t)}e^{F_2(t)} \cdots e^{F_n(t)}U_n(t).
\end{aligned}$$

(iii) 前問 (ii) において, ハミルトニアン $H(t)$ が, 交換関係 $[a, a^\dagger] = I$ を満たすボゾンの生成消滅演算子 $a^\dagger, a$ を用いて,

$$H(t) = f(t)(e^{i\omega t}a^\dagger + e^{-i\omega t}a), \quad (\omega > 0)$$

と表せるものとする. ただし, $f(t)$ は実関数でフーリエ変換 $\hat{f}(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\mu t}dt$ をもつと仮定する.

(a) $U(t) = e^{F_1(t)}e^{F_2(t)}$ となることを示せ.

(b) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\lim_{t_0\to-\infty}|\langle m|U(t)|0\rangle|^2$ を求めよ. ここで, $|0\rangle$ は規格化された真空（基底状態）であり, $|m\rangle = \frac{1}{\sqrt{m!}}(a^\dagger)^m|0\rangle$ $(m = 0, 1, \dots)$ である.