平成 29 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2017 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学

Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ．　Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は 3 時間 である．The duration of the examination is three hours.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと． The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

[注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かないこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙·計算用紙のすべてに，受験番号·氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may keep this problem sheet after the examination.

[記号 (Notations)]

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ はそれぞれ，実数の全体，複素数の全体, 整数の全体, 正の整数全体を表す.

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$, the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$, the set of all integers by $\mathbb{Z}$ and the set of all positive integers by $\mathbb{N}$.

1 $a,\ b$ を実数とする．次のベクトルで生成される $\mathbb{R}^5$ の部分空間の次元を求めよ．

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}5\\8\\3\\6\\2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\2a-b+2\\-a+b-1\\-a+2b-1\\3a-2b\end{pmatrix}$$

2 関数 $f_n(x),\ n=1,2,\ldots$ を次のように定める．

$$f_n(x)=n^2xe^{-n^2x}\quad(x\in\mathbb{R}).$$

(1) a が正数のとき級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ は $[a,\infty)$ 上で一様収束することを示せ．

(2) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ は $[0,\infty)$ 上では一様収束しないことを示せ．

3 $G=(\mathbb{Z}/133\mathbb{Z})^{\times}$ を環 $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$ の乗法群とする．このとき G の位数 9 の元の個数を求めよ．

4 n を正の整数とする．M を境界のないコンパクトな n 次元 C^{∞} 級多様体とする．このとき，M 上の 非退化な臨界点しかもたない 任意の C^{∞} 級関数は高々有限個の非退化臨界点しか持たないことを証明せよ．ただし，M 上の C^{∞} 級関数 f の臨界点 p に対して次の条件 **(C)** が成り立つとき，p は f の非退化臨界点と呼ばれる．

(C) p の近傍で定義された M の局所座標系を $(x_1,\ldots,x_n)$ とするとき，正方行列

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(p)\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

が逆行列を持つ．

5 領域 D を $D=\{z\in\mathbb{C}|\ |z|<1\}$ で定めるとし，$\bar{D}$ と ∂D はそれぞれ D の閉包と境界を表す．D 上で正則かつ $\bar{D}$ 上で連続な関数 f と g は 3 つの条件

$$|f(z)|\leq|g(z)|\quad(z\in D),$$
$$|f(z)|=|g(z)|\quad(z\in\partial D),$$
$$f(z)\neq0\quad(z\in\bar{D}\backslash\{0\})$$

を満たすものとする．このとき，$|\alpha|=1$ であるような $\alpha\in\mathbb{C}$ と $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ が存在して，$f(z)=\alpha z^m g(z)$ となることを示せ．

$\boxed{\mathbf{1}}$ Let a, b be real numbers. Determine the dimension of the subspace of $\mathbb{R}^5$ generated by the following vectors.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\\2\\0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\5\\1\\3\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}5\\8\\3\\6\\2\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0\\2a-b+2\\-a+b-1\\-a+2b-1\\3a-2b\end{pmatrix}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ We define the functions $f_n(x)$, $n = 1, 2\ldots$ by

$$f_n(x) = n^2 x e^{-n^2 x} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(1) Show that the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ is uniformly convergent on $[a, \infty)$ if a is a positive number.

(2) Show that the series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ is not uniformly convergent on $[0, \infty)$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Let $G = (\mathbb{Z}/133\mathbb{Z})^{\times}$ be the group of units of the ring $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$. Find the number of elements of G of order 9.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Let n be a positive integer. Let M be an n-dimensional compact C^{∞} manifold without boundary. Prove that every C^{∞} function on M has at most finitely many non-degenerate critical points if its critical points are all non-degenerate. Here a critical point p of a C^{∞} function f on M is said to be non-degenerate if the following condition **(C)** is satisfied:

(C) If $(x_1, \ldots, x_n)$ is a system of local coordinates of M around p, then the following square matrix is invertible:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p)\right)_{1 \le i,j \le n}.$$

$\boxed{\mathbf{5}}$ Let $D = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$. $\bar{D}$ and ∂D denote the closure and the boundary of D, respectively. Let f and g be functions holomolphic on D and continuous on $\bar{D}$, which satisfy the following three conditions:

$$|f(z)| \le |g(z)| \quad (z \in D),$$
$$|f(z)| = |g(z)| \quad (z \in \partial D),$$
$$f(z) \ne 0 \quad (z \in \bar{D} \backslash \{0\}).$$

Show there exist $\alpha \in \mathbb{C}$ with $|\alpha| = 1$ and $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ such that $f(z) = \alpha z^m g(z)$.