平成 30 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

専門科目

◎　問題は 12 題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{10}$のうちの 2 題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{12}$のうちの 2 題を選択して解答せよ.（数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は 2 題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって 2〜4 題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること.

◎　解答時間は <u>2 時間 30 分</u> である.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・<u>時計</u> 等の持ち込みは <u>禁止</u> する．指定された荷物置場に置くこと.

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること.
6. この問題用紙は持ち帰ってよい.

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す.

$\boxed{1}$ k を可換体とする．$k[X,Y]$ を k 上の 2 変数多項式環として，$f \in k[X,Y]$ の零点集合 $V(f)$ を

$$V(f) = \{(a,b) \in k \times k \mid f(a,b) = 0\}$$

によって定義する．次の 2 条件は同値であることを示せ.

(i) k は代数的閉体ではない.

(ii) $V(f) = \{(0,0)\}$ となる $f \in k[X,Y]$ が存在する.

$\boxed{2}$ p を素数，k, m を正の整数で，k と $p^2 - p$ は互いに素であるとする．位数 kp^m の有限群 G が次の性質を満たす部分群 N, H をもつとする.

(i) N は位数 p^m の巡回群で G の正規部分群である.

(ii) H は位数 k の群である.

このとき，G は N と H の直積であることを示せ.

$\boxed{3}$ 多項式 $X^7 - 11$ の有理数体 $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を $K \subset \mathbb{C}$ とする．このとき，次の問に答えよ.

(1) 拡大次数 $[K : \mathbb{Q}]$ を求めよ.

(2) $\mathbb{Q}$ と K の間の（$\mathbb{Q}$ でも K でもない）真の中間体の個数を求めよ.

(3) 上記 (2) の中間体のうち，$\mathbb{Q}$ 上 Galois 拡大になるものの個数を求めよ.

$\boxed{4}$ 正の整数 n に対して，n 次元単位球面 S^n を

$$S^n = \left\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}$$

によって定義する.

(1) $S^3 \times S^2$ の実係数 de Rham コホモロジー群を求めよ．(答のみでよい.)

(2) $f \colon S^5 \to S^3 \times S^2$ を全射な C^∞ 級写像とし，$CV(f)$ をその臨界値全体のなす集合とする．このとき，任意の $p \in S^2$ に対して，$CV(f) \cap (S^3 \times \{p\}) \neq \emptyset$ であることを示せ.

$\boxed{5}$ 4 次元球面

$$S^4 = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 1\ \}$$

の部分空間 L_1 と L_2 を

$$L_1 = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4 \mid\ x_1 = x_2 = x_3 = 0\ \},$$
$$L_2 = \{\ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S^4 \mid\ x_3 = x_4 = x_5 = 0\ \}$$

で定める．このとき，$S^4 \setminus (L_1 \cup L_2)$ の有理係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{6}$ μ, ν を $[0, \infty)$ 上の有限 Borel 測度とする．また，正の奇数全体を $\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ とする．このとき，すべての $n \in \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ に対し

$$\int_{[0,\infty)} e^{-nx}\, d\mu(x) = \int_{[0,\infty)} e^{-nx}\, d\nu(x)$$

が成り立てば，2 つの測度 μ, ν は一致することを示せ．

$\boxed{7}$ H を可分な無限次元実 Hilbert 空間とし，その内積を $(\ ,\ )$ で表す．$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ をそれぞれ H の正規直交基底とする．T を H 上のコンパクト作用素とし，正の整数 n について H 上の作用素 T_n を

$$T_n x = (Tx, e_n) f_n \qquad (x \in H)$$

と定義する．このとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ は作用素ノルムに関して収束することを示せ．

$\boxed{8}$ C^2 級関数 $u\colon \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0, && (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ &u(x + 2\pi, t) = u(x,t), && (x,t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) \end{aligned}$$

を満たすとする．この u に対して次の命題 (P) を考える．

(P)　任意の $t > 0$ に対し，x の関数 $u(x,t)$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数に拡張できる．

このとき，以下の問に答えよ．

(1) $u(x, 0) = \sin x$ のとき，(P) が成り立つことを示せ．

(2) 一般に，(P) が成り立つことを示せ．

$\boxed{9}$ 静止している流体に対して，遠方から平行な一様流が入ってくる状況を考える．時間を t，流入してくる流れに平行な方向に x 軸を取り，流れに垂直な方向へは物理量が一様であると仮定する．流体の密度を $\rho(x,t)$，圧力を $p(x,t)$，x 軸方向の速度を $v(x,t)$ とするとき，$\rho(x,t) > 0$ であり，等エントロピーの圧縮性流体が従う方程式は次のように与えられる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v) = 0, \tag{I}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{II}$$

$$p = \rho^\gamma. \tag{III}$$

ここで γ は比熱比，ν は動粘性係数であり，いずれも正の定数である．境界条件は $x \to \infty$ で $\rho = 1$, $v = \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$，および $x \to -\infty$ で $v = v_0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 0$ である．ただし，v_0 は正の定数である．

(1) (III) 式を用いて

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -c_s^2 \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{IV}$$

を示せ．ただし，$c_s = \sqrt{\gamma \dfrac{p}{\rho}}$ は音速である．

(2) 物理量が $\xi = x - ct$ (c は正の定数) で表されると仮定する．

(a) (I) と境界条件より $\rho(\xi)$ を $v(\xi)$ と c で表せ．

(b) (IV) を $\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = -C_s^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)$ と近似する．ここで C_s は正の定数である．このとき，境界条件より c を定めて $v(\xi)$ を求めよ．ただし，$\xi = 0$ で $v = v_0/2$ とする．

(c) (b) で求めた v を x, t の関数として表し，時間 t を固定した時の $v(x)$ の分布の概形を描け．$\nu \to 0$ のとき，$v(x)$ の概形はどのようになるか説明せよ．

$\boxed{10}$ nを正の整数とし，$a_{ij} \in \{0,1\}$ $(0 \leq i < j \leq n)$ とする．また，$\{0,1,\ldots,n\}$ 上の二項関係 R を

$$R = \{(i,j) \mid i < j \text{ かつ } a_{ij} = 1\}$$

で定め，R を含む最小の同値関係を $\sim$ とする．$b_0 = 0, b_1 = 1, \ldots, b_n = n$ とし，次のアルゴリズムにより $b_0, b_1, \ldots, b_n$ の値を更新する．

for $m = 1$ **to** n
  for $i = 0$ **to** $n-1$
    for $j = i+1$ **to** n
      if $a_{ij} = 1$ **then** $(b_i \leftarrow \mathbf{max}(b_i, b_j);\ b_j \leftarrow \mathbf{max}(b_i, b_j))$

ただし，$\leftarrow$ は代入操作，$A; B$ は「A を実行後に B を実行する」ことを表す．アルゴリズムの実行が停止したとき，任意の $k, l \in \{0,1,\ldots,n\}$ について

$$k \sim l \quad \Longleftrightarrow \quad b_k = b_l$$

が成立することを示せ．

$\boxed{11}$ G を以下の 2 条件を満たす有限無向グラフとする．

(i) G は 2 部グラフである．
(ii) G は r-正則である (すなわち，すべての頂点の次数が r である)．

G の各辺への色の割り当てで，端点を共有する辺がすべて異なる色であるとき，その割り当てを G の辺彩色と呼ぶ．また，G の辺彩色に必要な最小の色数を G の辺彩色数と呼ぶ．

(1) $r = 2$ のとき，G の辺彩色数が 2 であることを証明せよ．
(2) $r = 2^k$ (ただし，k は正の整数) のとき，G の辺彩色数が 2^k であることを証明せよ．なお，G の各連結成分が Euler 閉路をもつことを用いてもよい．

$\boxed{12}$ 一次元調和振動子の量子力学を考え，そのハミルトニアンを

$$H = \frac{1}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

とする．ただし，簡単のため $\hbar = 1$ としている．時間 t に依存する波動関数を $\psi(x,t)$ と記すとき

$$\psi(x, 2\pi) = -\psi(x, 0) \tag{1}$$

$$\psi(x, \pi) = -i\psi(-x, 0) \tag{2}$$

$$\psi(x, \pi/2) = e^{-\pi i/4}\widehat{\psi}(x, 0) \tag{3}$$

が成り立つことを示せ．ただし，$i = \sqrt{-1}$ であり，$\widehat{\psi}(p, 0)$ は $\psi(x, 0)$ のフーリエ変換

$$\widehat{\psi}(p, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx}\psi(x, 0)dx$$

である．