平成 30 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2018 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学
Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ．　Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は 3 時間 である．The duration of the examination is three hours.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと． The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

[注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かないこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may take home this problem sheet.

[記号 (Notations)]

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ はそれぞれ，実数の全体，複素数の全体, 整数の全体を表す．

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$, the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$, and the set of all integers by $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ a, b, c を実数とする．$\mathbb{R}^4$ の 3 つのベクトル

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

が 1 次従属になる (a, b, c) をすべて決定せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx$$

を求めよ．

$\boxed{\mathbf{3}}$ X を変数とし，$\mathbb{Z}[X]$ を $\mathbb{Z}$ 上の多項式環とする．$f(X) = X^3 + X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$ とおく．$f(X)$ と 5 で生成された $\mathbb{Z}[X]$ のイデアルを I とおく．$A = \mathbb{Z}[X]/I$ とする．

(1) 環 A の元 a であって，$a^2 = a$ を満たすものの個数を求めよ．

(2) 環 A の元 b であって，$b^{18} = 1$ を満たすものの個数を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ $K_i \subset \mathbb{R}^2$ $(i = 1, 2)$ を有界閉集合とする．$f\colon K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．各 $p \in K_1$ に対して

$$g(p) = \max\{f(p, q) \mid q \in K_2\}$$

とおき, 関数 $g\colon K_1 \to \mathbb{R}$ を定める．この時, g は連続であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{5}}$ $\mathbb{R}$ 上の実数値連続関数 f について，それが有界であり，かつ，任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$A_c = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = c\}$$

が空集合もしくは有限集合だとする．このとき f は $\mathbb{R}$ 上一様連続であることを示せ．

$\boxed{\mathbf{1}}$ Let a, b, c be real numbers. Determine all (a, b, c) such that the following three vectors

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}$$

in $\mathbb{R}^4$ are linearly dependent.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Find the value of the integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\, dx.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ Let $\mathbb{Z}[X]$ be the polynomial ring over $\mathbb{Z}$ with variable X. Let $f(X) = X^3 + X^2 + 2X + 2 \in \mathbb{Z}[X]$. Let I be the ideal of $\mathbb{Z}[X]$ generated by $f(X)$ and 5. Put $A = \mathbb{Z}[X]/I$.

(1) Find the number of elements $a \in A$ such that $a^2 = a$.

(2) Find the number of elements $b \in A$ such that $b^{18} = 1$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Let $K_i \subset \mathbb{R}^2$ be a bounded closed subset for $i = 1, 2$. Let $f\colon K_1 \times K_2 \to \mathbb{R}$ be a continuous map. Define a function $g\colon K_1 \to \mathbb{R}$ by

$$g(p) = \max\{f(p, q) \mid q \in K_2\}$$

for $p \in K_1$. Show that g is continuous.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Let f be a bounded real-valued continuous function on $\mathbb{R}$. Suppose that for every $c \in \mathbb{R}$,

$$A_c = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = c\}$$

is either the empty set or a finite set. Show that f is uniformly continuous on $\mathbb{R}$.