平成31年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

専門科目

◎　問題は12題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{9}$と$\boxed{11}$の10題のうちの2題を選択して解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{12}$のうちの2題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は2題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって2〜4題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は 2時間30分 である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．

[注意]

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題用紙は持ち帰ってよい．

[記号]

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}[X,Y]$ を変数 X,Y に関する実数係数の 2 変数多項式環とする. I を X^2+Y^2 で生成された $\mathbb{R}[X,Y]$ のイデアルとする. $A=\mathbb{R}[X,Y]/I$ とおく. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) A は整域であることを示せ.

(ii) A の商体を K とおき, A の K における整閉包を B とおく. A 加群としての B の生成系を一組与えよ.

$\boxed{2}$ 有限群 G に対して, 次の条件 $(*)$ を考える.

$(*)$ 任意の正整数 n に対して, G の部分群のうち, 位数が n のものの個数は 1 以下である.

以下の問に答えよ.

(i) G は有限 Abel 群で $(*)$ を満たすとする. このとき, G は巡回群であることを示せ.

(ii) G は有限群で $(*)$ を満たすとする. H を G の正規部分群とする. このとき, G/H も $(*)$ を満たすことを示せ.

(iii) G は有限群で $(*)$ を満たすとする. このとき, G は巡回群であることを示せ.

$\boxed{3}$ 多項式 $f(X)=X^4+6X^2+2\in\mathbb{Q}[X]$ の $\mathbb{Q}$ 上の最小分解体を K とおく. K を $\mathbb{C}$ の部分体とみなし, $F=K\cap\mathbb{R}$ とおく. このとき, 次の問に答えよ.

(i) 拡大次数 $[F:\mathbb{Q}]$ を求めよ.

(ii) $F/\mathbb{Q}$ は Galois 拡大であることを示せ.

$\boxed{4}$ $n \geq 2$ に対して,

$$S^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\right\}, \quad \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

とし, 写像 $\Phi : S^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{C}^n$ を

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, z) = (x_1 z, \ldots, x_n z)$$

と定める.

(1) Φ の像 M が $\mathbb{C}^n$ の実 n 次元部分多様体であることを示せ.

(2) n が偶数のとき, M が向き付け可能であることを示せ.

$\boxed{5}$ $\mathbb{C}$ の部分空間

$$X = \{1 - e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\} \cup \{-1 + e^{i\theta} \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \theta < 2\pi\}$$

を考える．整数 p, q に対して，写像 $f : X \to X$ を

$$f(1 - e^{i\theta}) = -1 + e^{ip\theta},$$
$$f(-1 + e^{i\theta}) = 1 - e^{iq\theta}$$

で定め，$X \times [0, 1]$ に

$$(x, 0) \sim (f(x), 1)$$

$(x \in X)$ で生成される同値関係 $\sim$ を与える．商空間 $Y = (X \times [0, 1])/\sim$ の整係数ホモロジー群を計算せよ．

$\boxed{6}$ 区間 $(0, \infty)$ 上の関数列 $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\varphi_n(x) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n} t^{x-1}\, dt \qquad (x > 0)$$

により定める．

(1) 任意の $x \in (0, \infty)$ に対して数列 $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ は収束することを示せ．

(2) 関数 φ を

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \qquad (x > 0)$$

で定める．φ は区間 $(0, \infty)$ 上で微分可能であることを示せ．

$\boxed{7}$ 以下，$C([0,1])$ を区間 $[0,1]$ 上の連続関数全体のなす複素 Banach 空間，$L^2([0,1])$ を $[0,1]$ 上の 2 乗可積分な関数全体のなす複素 Hilbert 空間とする．$u \in L^2([0,1])$ に対して

$$(Tu)(t) = \int_0^t u(s)ds \qquad (t \in [0,1])$$

とする．

(1) T を $L^2([0,1])$ から $C([0,1])$ への作用素とみなすとき，T はコンパクト作用素であることを示せ．

(2) T を $L^2([0,1])$ から $L^2([0,1])$ への作用素とみなす．T の共役作用素を T^* とするとき，作用素 T^*T の固有値をすべて求めよ．

$\boxed{8}$ 以下，区間 $[0,1]$ 上の 2 乗可積分関数 g に関して

$$\|g\| = \left(\int_0^1 |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

とする．C^2 級関数 $u\colon [0,\infty) \times [0,1] \to \mathbb{R}$ は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) & (t > 0,\ x \in (0,1)) \\ u(t,0) = u(t,1) = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

を満たすとする．$f(x) = u(0,x)$ とおくとき，以下の問に答えよ．

(1) 次の $V(t)$ は $t \geq 0$ によらない定数であることを示せ．

$$V(t) = \|u(t,\cdot)\|^2 + 2\int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial x}(s,\cdot) \right\|^2 ds.$$

(2) $t > 0$ を固定し，$h(x) = u(t,x)$ とおく．任意の $x \in [0,1]$ について次の不等式を示せ．

$$|h(x)|^2 \leq 2\|h\| \left\| \frac{dh}{dx} \right\|.$$

(3) 次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\int_0^\infty \left(\sup_{x\in[0,1]} |u(t,x)|^4 \right) dt \leq 2\|f\|^4.$$

$\boxed{9}$ 3次元空間 $\mathbb{R}^3$ において, 原点を中心とする半径 1 の球の表面の温度の時間変化を与えたときの球の外側の温度を考える. 温度変化は偏微分方程式

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rT) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial T}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 T}{\partial\phi^2}$$

に従う. ここで (r,θ,ϕ) は極座標, t は時間, $T(r,\theta,\phi,t)$ は温度である.

いま, n を 0 以上の整数とし, 球の表面の時間 t における温度が $T(1,\theta,\phi,t) = \mathrm{Re}[e^{it}\sin^n\theta\cos(n\phi)]$ で与えられるとき,

$$T(r,\theta,\phi,t) = \mathrm{Re}[e^{it}\sin^n\theta\cos(n\phi)r^{-n-1}f_n(r)] \quad (1 \le r < \infty)$$
$$\lim_{r\to\infty} T(r,\theta,\phi,t) = 0$$

の形の解を求めることを考える. ただし $f_n(r)$ は複素数値関数とする.

(i) $f_n(r)$ の満たす方程式を導け.

(ii) $n=0$ での $T(r,\theta,\phi,t)$ を求めよ.

(iii) $n=m$ での解 $f_m(r)$ に対して $r\dfrac{df_m}{dr} - (2m+1)f_m$ が (i) の $n=m+1$ での解となっていることを示せ.

(iv) $n=1$ での $T(r,\theta,\phi,t)$ を求めよ.

$\boxed{10}$ 1次元調和振動子の量子力学を考える．$i=\sqrt{-1}$, $\hbar=1$ として，位置演算子を $\hat{x}$，運動量演算子を $\hat{p}$，恒等演算子を $\hat{1}$ と記せば，交換関係 $[\hat{x},\hat{p}]=i\hat{1}$ が成り立ち，系のハミルトニアン演算子は

$$\hat{H}=\frac{1}{2}(\hat{p}^2+\hat{x}^2)$$

で与えられる．

(i) 消滅，生成演算子

$$\hat{a}=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}+i\hat{p}),\quad \hat{a}^\dagger=\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}-i\hat{p})$$

の交換関係を求め，これらで $\hat{H}$ を表せ．

(ii) 複素数 z およびその複素共役 $\bar{z}$ に対して

$$\hat{D}(z)=e^{z\hat{a}^\dagger-\bar{z}\hat{a}}$$

とおけば，

$$e^{-it\hat{H}}\hat{D}(z)=\hat{D}(ze^{-it})e^{-it\hat{H}}\quad (t\in\mathbb{R})$$

が成り立つことを示せ．

(iii) 時間を $t\in\mathbb{R}$ と記し，この調和振動子の古典力学に対して，ハミルトンの正準方程式の解 $(\alpha(t),\beta(t))$ を任意に選ぶ．ただし，$\alpha(t)$ は位置成分，$\beta(t)$ は運動量成分を表す．以下ではシュレディンガー表示で考え，第 n 次励起状態の定常波動関数を $\psi_n(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ とする．時間に依存する波動関数 $\Psi(x,t)$ が初期条件 $\Psi(x,0)=e^{i\beta(0)x}\psi_n(x-\alpha(0))$ を満たすならば，

$$|\Psi(x,t)|^2=|\psi_n(x-\alpha(t))|^2$$

が成り立つことを (ii) の結果を用いて示せ．

$\boxed{11}$ n を 2 以上の整数とし，$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ を整数とする．次のプログラムについて，以下の問に答えよ．

$$
\begin{array}{l}
\textsf{for } k = 0 \textsf{ to } n-1 \textsf{ do } x_k \ \leftarrow\ a_k \textsf{ done };\\
i \ \leftarrow\ 0\,;\\
m \ \leftarrow\ 0\,;\\
\textsf{while } m < n \textsf{ do}\\
\quad \textsf{if } x_{i \bmod n} > x_{(i+1) \bmod n} \textsf{ then}\\
\quad\quad x_{i \bmod n} \ \leftarrow\ x_{i \bmod n} - 1\,;\\
\quad\quad x_{(i+1) \bmod n} \ \leftarrow\ x_{(i+1) \bmod n} + 1\,;\\
\quad\quad m \ \leftarrow\ 0\\
\quad \textsf{else}\\
\quad\quad m \ \leftarrow\ m + 1\\
\quad \textsf{endif};\\
\quad i \ \leftarrow\ i + 1\\
\textsf{done}
\end{array}
$$

(1) $n = 3$ の場合について，このプログラムの実行が停止しない整数 a_0, a_1, a_2 の例をひとつ与えよ．

(2) $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ の和が n の整数倍であるとき，このプログラムの実行が停止すること，および停止したときに $x_0 = x_1 = \cdots = x_{n-1}$ となることを示せ．

$\boxed{12}$ $G = (V, E)$ を有限の頂点集合 V と辺集合 $E \subseteq V \times V$ をもつ有向グラフとし，$w : E \to \mathbb{R}$ を辺重みとする．G 中の単純有向閉路 C に対して，その平均重みを

$$\frac{\sum_{e \in E(C)} w(e)}{|E(C)|}$$

と定義する．ただし，$E(C)$ は C に含まれる辺集合, $|E(C)|$ は $E(C)$ の元の個数とする．このとき，任意の実数 t に対して，以下の条件 (i) と (ii) が同値であることを示せ．

(i) G 中に平均重みが t 未満の単純有向閉路が存在しない．

(ii) ある関数 $p : V \to \mathbb{R}$ が存在して，任意の辺 $e = (u, v) \in E$ に対して，$p(v) - p(u) + t \leq w(e)$ が成立する．