平成 31 年度　京都大学大学院理学研究科 (数学・数理解析専攻)

数学系 外国人留学生修士課程入学試験問題

2019 Entrance Examination For Foreign Students
Master Course in Mathematics, Graduate School of Science, Kyoto University

数学

Mathematics

⊗ $\boxed{1}$ から $\boxed{5}$ までの全問を解答せよ．　Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{5}$.

⊗ 解答時間は 3 時間 である．The duration of the examination is three hours.

⊗ 問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと． The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

⊗ 参考書 · ノート類の持ち込みは 禁止 する．It is not allowed to refer to any textbooks or notebooks during the examination.

[注意 (Cautions)]

1. 指示のあるまで開かないこと．Do not open this sheet until it is permitted.
2. 解答用紙 · 計算用紙のすべてに，受験番号 · 氏名を記入せよ．Write your name and applicant number in each answer sheet and scratch pad.
3. 解答は各問ごとに別の解答用紙を用い，問題番号を各解答用紙の枠内に記入せよ．Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.
4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを明示して次の用紙に移ること．If you need more than one answer sheets for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.
5. この問題用紙は持ち帰ってよい．You may take home this problem sheet.

[記号 (Notation)]

以下の問題で $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ はそれぞれ，実数の全体，複素数の全体, 整数の全体を表す．

In the problems, we denote the set of all real numbers by $\mathbb{R}$, the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$, and the set of all integers by $\mathbb{Z}$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ c を複素数とし，$A(c)$ を次で定まる正方行列とする．

$$A(c) = \begin{pmatrix} 2c & 1-2c & 0 \\ c & 1-c & 0 \\ -c-2 & c+4 & -1 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 $A(c)$ の固有値をすべて求めよ．

(2) $A(c)$ が対角化可能でないような $c \in \mathbb{C}$ をすべて決定せよ．

$\boxed{\mathbf{2}}$ 複素積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{\sqrt{z^2-1}}{z-3}dz$$

を求めよ．ここで $\sqrt{z^2-1}$ は，$z > 1$ のときに $\sqrt{z^2-1} > 0$ を満たす分枝とする．

$\boxed{\mathbf{3}}$ アーベル群 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ の元 $a = (1+2\mathbb{Z}, 3+4\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z})$ で生成される部分群を H とする．剰余群 G/H を巡回群の直積で表せ．

$\boxed{\mathbf{4}}$ 連続曲線 $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ の像が有界であるとする．集合

$$X = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\gamma(t) \mid t \geq T\}}$$

が連結であることを示せ．ただし，$\mathbb{R}^2$ の部分集合 S に対してその閉包を $\overline{S}$ で表わすものとする．

$\boxed{\mathbf{5}}$ f を区間 $[0,1]$ 上の実数値連続関数とする．次の極限を求めよ．

$$\lim_{t \to +0} t^2 \int_t^1 \frac{f(s)}{s^3} ds.$$

$\boxed{\mathbf{1}}$ Let c be a complex number, and let $A(c)$ be a square matrix given by

$$A(c) = \begin{pmatrix} 2c & 1-2c & 0 \\ c & 1-c & 0 \\ -c-2 & c+4 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Find all the eigenvalues of $A(c)$.

(2) Determine all $c \in \mathbb{C}$ for which $A(c)$ is not diagonalizable.

$\boxed{\mathbf{2}}$ Compute the following complex integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=2} \frac{\sqrt{z^2-1}}{z-3}\,dz,$$

taking a branch of $\sqrt{z^2-1}$ satisfying $\sqrt{z^2-1} > 0$ for $z > 1$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Consider the abelian group $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ and its subgroup H generated by an element $a = (1+2\mathbb{Z}, 3+4\mathbb{Z}, 2+6\mathbb{Z})$ of G. Express the quotient group G/H as a product of cyclic groups.

$\boxed{\mathbf{4}}$ Let $\gamma : [0, +\infty) \to \mathbb{R}^2$ be a continuous curve whose image is bounded. Prove that the set

$$X = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{\gamma(t) \mid t \geq T\}}$$

is connected, where $\overline{S}$ denotes the closure of a subset S of $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{\mathbf{5}}$ Let f be a continuous real-valued function on the interval $[0,1]$. Compute the following limit:

$$\lim_{t \to +0} t^2 \int_t^1 \frac{f(s)}{s^3}\,ds.$$