令和２年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系・数理解析系 入学試験問題

基礎科目

◎　問題は７題ある．数学系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{6}$の６題を解答せよ．数理解析系志望者は，$\boxed{1}$〜$\boxed{5}$の５題を解答し，さらに，$\boxed{6}$, $\boxed{7}$のうちの１題を選択して解答せよ．(数学系と数理解析系の一方のみを志望している者の解答問題数は6題であり，両系をともに志望している者の解答問題数は，選択によって6〜7題となる.）選択した問題番号を選択票に記入すること．

◎　解答時間は <u>３時間 30 分</u> である．

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・<u>時計</u>等の持ち込みは <u>禁止</u> する．指定された荷物置場に置くこと．

［注意］

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
4. １問を２枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
6. この問題冊子は持ち帰ってよい．

［記号］

以下の問題で $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．

$\boxed{1}$ 次の積分を計算せよ．

$$\iiint_D xyz\, dxdydz$$

ただし，$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\right\}$ とする．

$\boxed{2}$ a を複素数とし, 3 次複素正方行列 A を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & a-1 & a \end{pmatrix}$$

このとき, A の固有値を全て求めよ．また, 各固有値に対する固有空間の次元を求めよ．

$\boxed{3}$ V, W を有限次元複素ベクトル空間，$f : V \to W$，$g : W \to V$ を線形写像とし，任意の $w \in W$ に対して $f(g(w)) = w$ が成り立つものとする．このとき，V の部分空間 V_0，V_1 で，以下の 3 条件 (i)，(ii)，(iii) を全て満たすようなものが存在することを示せ．

(i) $V = V_0 \oplus V_1$，すなわち，V は V_0 と V_1 の直和である．

(ii) 任意の $v \in V_0$ に対し，$g(f(v)) = 0$.

(iii) 任意の $v \in V_1$ に対し，$g(f(v)) = v$.

$\boxed{4}$ 開区間 $(0, \infty)$ 上の実数値連続関数 f が広義単調減少，つまり, $0 < x \leq y$ ならば $f(x) \geq f(y)$ とする．さらに，広義積分 $\displaystyle\int_0^\infty f(x)\, dx$ が収束するとする．

(1) 任意の $x \in (0, \infty)$ に対して $f(x) \geq 0$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\lim_{x \to +0} xf(x) = \lim_{x \to \infty} xf(x) = 0$ を示せ．

$\boxed{5}$ α は $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする．このとき広義積分

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^2}\,dx$$

を求めよ．

$\boxed{6}$ ２次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ に対し，$S^2 \times S^2$ の部分空間

$$X = \{(u,v) \in S^2 \times S^2 \mid u \cdot v = 0\}$$

を考える．ここで $u = (u_1,u_2,u_3)$, $v = (v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

とする．このとき X はコンパクトな微分可能多様体であることを示せ．

$\boxed{7}$ 関数 $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が C^1 級のとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\tfrac{k}{n}) \,-\, n\int_0^1 f(x)\,dx\right)$$

を求めよ．