令和４年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系 入学試験問題

2022 Entrance Examination
Master Course in Mathematics, Division of Mathematics and Mathematical Sciences，Graduate School of Science, Kyoto University

基礎科目 Basic Mathematics

◎　$\boxed{1}$ から $\boxed{6}$ までの全問を解答せよ．
Answer all questions from $\boxed{1}$ to $\boxed{6}$.

◎　解答時間は 3 時間 30 分　である．
The duration of the examination is 3 hours and 30 minutes.

◎　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or clocks and watches during the examination. They have to be kept in the designated area.

［注意］　Instructions

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
   Do not open this sheet until instructed to do so.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
   Write your name and applicant number in each answer sheet and draft/calculation sheet.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
   Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.

4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to the next sheet. If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は，上から答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．When handing your exam to the proctor, stack answer sheets (in the order of question numbers) followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい．
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．
In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

English version follows.

$\boxed{1}$ 次の広義積分が収束するような実数 a の範囲を求めよ．

$$\iint_D \frac{y}{(1+\sqrt{x^2+y^2}-x)^2(x^2+y^2)^a}dxdy.$$

ただし，$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\geq 1\}$ とする．

$\boxed{2}$ V を実ベクトル空間とし，v_1, v_2, v_3, v_4 を V の 1 次独立なベクトルとする．$a\in\mathbb{R}$ に対し

$$\begin{aligned}
w_1 &= v_1-v_2+v_3\\
w_2 &= v_1+(a-1)v_2+v_3-av_4\\
w_3 &= 2v_1-2v_2+(a+2)v_3\\
w_4 &= v_1-v_2+v_3+(a+1)v_4
\end{aligned}$$

とおく．

(1) w_1, w_2, w_3, w_4 が 1 次独立となるような a の条件を求めよ．

(2) w_1, w_2, w_3, w_4 が 1 次従属となる a に対し，w_1, w_2, w_3, w_4 で生成される V の部分空間 $\langle w_1,w_2,w_3,w_4\rangle$ の次元を求めよ．

$\boxed{3}$ アーベル群 $G=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ の部分群 H を

$$H=\{(a,b,0,0)\,|\,a\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z},b\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

とするとき，G の位数 12 の部分群 K で $G=K+H$ となるものの数を求めよ．ただし

$$K+H=\{\alpha+\beta\,|\,\alpha\in K,\beta\in H\}$$

である．

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}$ で定義された関数

$$f(x)=\int_0^\infty |x+t\sin t|e^{-t}dt$$

は最小値を持つことを示せ．

$\boxed{5}$ 次の広義積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^3\sin x}{(x^2+1)^2}dx.$$

$\boxed{6}$ ユークリッド空間 $\mathbb{R}^4$ の部分空間 X を

$$X=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4\,|\,x^2+y^2+z^2+w^2=1,\ x^3+y^3+z^3+w^3=0\}$$

で定める．このとき X はコンパクトな微分可能多様体であることを示せ．

$\boxed{1}$ Find all real numbers a, for which the improper integral

$$\iint_D \frac{y}{(1+\sqrt{x^2+y^2}-x)^2(x^2+y^2)^a}dxdy$$

converges. Here, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 1\}$.

$\boxed{2}$ Let V be an $\mathbb{R}$-vector space and let v_1, v_2, v_3, v_4 be linearly independent vectors in V. For $a \in \mathbb{R}$, we put:

$$\begin{aligned} w_1 &= \ v_1 - v_2 + v_3 \\ w_2 &= \ v_1 + (a-1)v_2 + v_3 - av_4 \\ w_3 &= \ 2v_1 - 2v_2 + (a+2)v_3 \\ w_4 &= \ v_1 - v_2 + v_3 + (a+1)v_4. \end{aligned}$$

(1) Determine all possible a for which w_1, w_2, w_3, w_4 are linearly independent.

(2) For a such that w_1, w_2, w_3, w_4 are linearly dependent, determine the dimension of the subspace of V, $\langle w_1, w_2, w_3, w_4\rangle$ generated by w_1, w_2, w_3, w_4.

$\boxed{3}$ Let H be the subgroup

$$H = \{(a, b, 0, 0) \mid a \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}\}$$

of the abelian group $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Determine the number of subgroups K of G of order 12 satisfying $G = K + H$, where

$$K + H = \{\alpha + \beta \mid \alpha \in K, \beta \in H\}.$$

$\boxed{4}$ Show that the function

$$f(x) = \int_0^\infty |x + t\sin t|e^{-t}dt$$

defined on $\mathbb{R}$ admits a minimum value.

$\boxed{5}$ Find the value of the improper integral

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2}dx.$$

$\boxed{6}$ Let X be the subspace of the Euclidean space $\mathbb{R}^4$ defined by

$$X = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1,\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 0\}.$$

Show that X is a compact differentiable manifold.