令和４年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系 入学試験問題

2022 Entrance Examination
Master Course in Mathematics, Division of Mathematics and Mathematical Sciences，Graduate School of Science, Kyoto University

専門科目 Advanced Mathematics

◎　10 題の問題 $\boxed{1}$～$\boxed{10}$ のうちの２題を選択して解答せよ．選択した問題番号を選択票に記入すること．
Select and answer 2 questions out of 10 questions $\boxed{1}$～$\boxed{10}$. Write the question numbers you chose on the selection sheet.

◎　解答時間は 2 時間 30 分 である．
The duration of the examination is 2 hours and 30 minutes.

◎　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or clocks and watches during the examination. They have to be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
   Do not open this sheet until instructed to do so.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
   Write your name and applicant number in each answer sheet and draft/calculation sheet.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．

Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.

4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to the next sheet. If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
   When handing your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (in the order of question numbers) followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい．
   You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

English version follows.

$\boxed{1}$ p は 3 以上の素数とする． $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ で有限体 $\mathbb{F}_p$ の元を成分とし行列式が 1 である 2×2-行列全体がなす群を表す．このとき， $A^{p-1} = \mathbb{1}$ となる $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ の元 A の個数を求めよ．ここで，$\mathbb{1}$ は単位行列である．

$\boxed{2}$ $K = \mathbb{C}(t)$ を変数 t に関する複素数係数の 1 変数有理関数体とする．u を 0 でない複素数とし，L を多項式 $f(X) = X^4 + 2utX^2 + t \in K[X]$ の K 上の最小分解体とする．

(1) 拡大次数 $[L : K]$ を求めよ．

(2) ガロア群 $\mathrm{Gal}(L/K)$ がアーベル群であるか？理由をつけて答えよ．

$\boxed{3}$ m, n を 2 以上の整数, $a_1, \cdots, a_n$ を 0 以上 m 未満の整数, $A = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ を $x_1, \cdots, x_n$ を不定元とする $\mathbb{C}$ 上の多項式環とする．$\zeta_m = e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$ を 1 の原始 m 乗根とする．任意の $P \in A$ に対して $\varphi(P) \in A$ を

$$\varphi(P)(x_1, \cdots, x_n) = P(\zeta_m^{a_1} x_1, \cdots, \zeta_m^{a_n} x_n)$$

と定め，$A' := \{P \in A \mid P = \varphi(P)\}$ とおく．この時，以下に答えよ．

(1) A' は A の部分環であることを示せ．

(2) a_i が全て 1 以下である時，A' が $\mathbb{C}$ 上多項式環と同型になる $a_1, \cdots, a_n$ の必要十分条件を求めよ．

$\boxed{4}$ $\mathbb{RP}^n$ を n 次元実射影空間とする．$(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して，$[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{RP}^n$ を $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ の生成する 1 次元実部分空間の与える点とする．$\mathbb{RP}^3$ の部分集合 M を

$$M = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{RP}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}$$

とおく．

(1) M は $\mathbb{RP}^3$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(2) 写像 $f : M \to \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ を次で定める．

$$f([x_0, x_1, x_2, x_3]) = ([x_0, x_1], [x_2, x_3]).$$

このとき，f は C^∞ 級の沈め込みであることを示せ．

(3) $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とおく．このとき，M は $S^1 \times S^1$ と微分同相であることを示せ．

$\boxed{5}$ $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とする．$D^2 \times D^2 \times D^2$ の部分空間 X_1, X_2, X_3 を

$$X_1 = D^2 \times S^1 \times S^1, \quad X_2 = S^1 \times D^2 \times S^1, \quad X_3 = S^1 \times S^1 \times D^2$$

により定める．

(1) $Y = X_1 \cup X_2$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

(2) $Z = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ の整数係数ホモロジー群を求めよ．

$\boxed{6}$ μ を $[0,\infty)$ 上の Borel 測度とする．f は $[0,\infty)$ 上の関数で一様連続かつ非負値とし，

$$\int_{[0,\infty)} e^{f(x)}\mu(dx) < \infty$$

を満たすと仮定する．このとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,\infty)}\left(1+\int_0^{1/n} f(x+t)dt\right)^n \mu(dx)$$

を求めよ．

$\boxed{7}$ 区間 $I=(0,1)$ に対し，$L^2(I)$ を I 上の 2 乗可積分複素数値関数全体の空間とし，

$$(f,g) := \int_I f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,\quad \|f\|_2 := \sqrt{(f,f)},\quad \|f\|_1 := \int_I |f(x)|\,dx$$

とする．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $L^2(I)$ の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が

$$\|f_n\|_1 \longrightarrow 0, \qquad \|f_n\|_2 = 1\ (n\geq 1)$$

を満たすとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に $L^2(I)$ で弱収束することを示せ．

(2) $T : L^2(I)\to L^2(I)$ がコンパクト作用素であるとき，

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists C_\varepsilon>0;\ \forall f\in L^2(I),\ \|Tf\|_2 \leq \varepsilon\|f\|_2 + C_\varepsilon\|f\|_1$$

を示せ．

$\boxed{8}$ n を 2 以上の整数, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ とし, $\overline{\Omega}$ をその閉包とする. $C^2(\overline{\Omega})$ を Ω 上 C^2 級かつ 2 階までの各偏導関数が $\overline{\Omega}$ 上の連続関数に拡張できるような実数値関数全体の集合とする. $f \in C^2(\overline{\Omega})$ とする. 各 $\varepsilon > 0$ に対し, $u_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ を方程式

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon &= f, \qquad x \in \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

の解とする. ただし, $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ である. このとき, 以下の問に答えよ.

(i) ε に依存しないある $C_1, C_2 > 0$ が存在して

$$\sqrt{\varepsilon}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \varepsilon \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \le C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

が成り立つことを示せ.

(ii) $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u_\varepsilon - f\|_{L^2(\Omega)} = 0$ を示せ.

$\boxed{9}$ 実数値関数の集合を

$$X = \left\{ u \in C^2\big((0,1)\big) \cap C\big([0,1]\big) \;\middle|\; u(0) = 0,\ u(1) = 1,\ \int_0^1 \left(xu'(x)\right)^2 dx < \infty \right\}$$

とし，$u \in X$ に対する次の汎関数を考える：

$$J[u] = \int_0^1 e^{-x} \left(2\left(u(x)\right)^2 + \frac{9}{2} x^2 \left(u'(x)\right)^2 \right) dx.$$

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $C_0^\infty\big((0,1)\big)$ を開区間 $(0,1)$ の中にコンパクトな台を持つ無限回微分可能な実数値関数の空間とする．$u \in X$ と $\varphi \in C_0^\infty\big((0,1)\big)$ に対して，

$$\frac{\delta J}{\delta u}(u;\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J[u + \varepsilon\varphi] - J[u]}{\varepsilon}$$

を求めよ．

(2) 以下を満たすすべての $u \in X$ を級数解の形で求めよ．

$$\text{任意の } \varphi \in C_0^\infty\big((0,1)\big) \text{ に対して } \frac{\delta J}{\delta u}(u;\varphi) = 0.$$

$\boxed{10}$ $\mathbf{N}$ を非負整数全体の集合，$B = \{x_1 \cdots x_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, n \geq 0\}$ を文字 $\mathtt{a}, \mathtt{b}$ からなる有限文字列の集合とする．空文字列を ε で表す．また，x^m で文字 x を m 回繰り返した文字列を表す．以下，文字列 $w \in B$ の長さを $|w|$, w 中に出現する $\mathtt{a}$ の個数を $|w|_{\mathtt{a}}$ で表す．

関数 $g : B \times B \to B$ を以下のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned} g(\varepsilon, u) &= u \\ g(\mathtt{a}w, u) &= g(w, u\mathtt{a}) \\ g(\mathtt{ba}w, u) &= u\mathtt{ab}w \\ g(\mathtt{bb}w, u) &= g(\mathtt{b}w, \mathtt{b}u) \\ g(\mathtt{b}, u) &= \mathtt{b}u \end{aligned}$$

また，関数 $f : B \to B$ を $f(w) = g(w, \varepsilon)$ で定義する．

$1 \leq k < n$ とする．$B_{n,k} = \{w \in B \mid |w| = n, |w|_{\mathtt{a}} = k\}$ と定めるとき，以下の等式

$$\{f^i(\mathtt{b}^{n-k}\mathtt{a}^k) \mid i \in \mathbf{N}\} = B_{n,k}$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{1}$ Let p be a prime number greater than or equal to 3. We denote by $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ the group of all 2×2-matrices A whose entries consist of elements of the finite field $\mathbb{F}_p$ and such that $\det(A) = 1$. Determine the number of elements A of $\mathrm{SL}(2, \mathbb{F}_p)$ such that $A^{p-1} = \mathbb{1}$, where $\mathbb{1}$ is the unit matrix.

$\boxed{2}$ Let $K = \mathbb{C}(t)$ be the field of rational functions over $\mathbb{C}$ in variable t. Let u be a nonzero complex number and let L be the splitting field of the polynomial $f(X) = X^4 + 2utX^2 + t \in K[X]$ over K.

(1) Determine the degree $[L : K]$.

(2) Is the Galois group $\mathrm{Gal}(L/K)$ abelian? Give a reason for your answer.

$\boxed{3}$ Let m and n be integers greater than or equal to 2, and let $a_1, \cdots, a_n$ be integers with $0 \le a_i < m$. Let $A = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ be a polynomial ring over $\mathbb{C}$ with variables $x_1, \cdots, x_n$. To each $P \in A$, we associate $\varphi(P) \in A$ by

$$\varphi(P)(x_1, \cdots, x_n) = P(\zeta_m^{a_1} x_1, \cdots, \zeta_m^{a_n} x_n),$$

where $\zeta_m := e^{2\pi\sqrt{-1}/m}$ is the m-th primitive root and define $A' := \{P \in A \mid P = \varphi(P)\}$.

(1) Prove that A' is a subring of A.

(2) We suppose that a_i are all at most 1. Under this condition, find a necessary and sufficient condition such that A' is isomorphic to a polynomial ring over $\mathbb{C}$.

$\boxed{4}$ Let $\mathbb{RP}^n$ denote the n-dimensional real projective space. For $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, let $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \in \mathbb{RP}^n$ denote the point that is given by the 1-dimensional real vector subspace generated by $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Define a subset M of $\mathbb{RP}^3$ by

$$M = \{[x_0, x_1, x_2, x_3] \in \mathbb{RP}^3 \mid x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 + x_3^2\}.$$

(1) Show that M is a C^∞-submanifold of $\mathbb{RP}^3$.

(2) Let $f : M \to \mathbb{RP}^1 \times \mathbb{RP}^1$ be the map defined by

$$f([x_0, x_1, x_2, x_3]) = ([x_0, x_1], [x_2, x_3]).$$

Show that f is a C^∞-submersion.

(3) Let $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Show that M is diffeomorphic to $S^1 \times S^1$.

$\boxed{5}$ Let $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ and $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Define subspaces X_1, X_2, X_3 of $D^2 \times D^2 \times D^2$ by

$$X_1 = D^2 \times S^1 \times S^1, \quad X_2 = S^1 \times D^2 \times S^1, \quad X_3 = S^1 \times S^1 \times D^2.$$

(1) Compute the homology groups of $Y = X_1 \cup X_2$ with integer coefficients.

(2) Compute the homology groups of $Z = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ with integer coefficients.

$\boxed{6}$ Let μ be a Borel measure on $[0, \infty)$. Let f be a function on $[0, \infty)$ which is uniformly continuous and non-negative. Assume

$$\int_{[0,\infty)} e^{f(x)} \mu(dx) < \infty.$$

Find the following limit:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{[0,\infty)} \left(1 + \int_0^{1/n} f(x + t) dt\right)^n \mu(dx).$$

$\boxed{7}$ Let $I = (0,1)$ and let $L^2(I)$ be the space of all square integrable complex-valued functions on I. We set

$$(f,g) := \int_I f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \quad \|f\|_2 := \sqrt{(f,f)}, \quad \|f\|_1 := \int_I |f(x)|\,dx$$

Answer the following questions.

(1) Suppose that a sequence $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $L^2(I)$ satisfies

$$\|f_n\|_1 \longrightarrow 0, \qquad \|f_n\|_2 = 1 \ (n \geq 1).$$

Show that $f_n \longrightarrow 0$ weakly in $L^2(I)$.

(2) Suppose that $T : L^2(I) \to L^2(I)$ is compact. Show that

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists C_\varepsilon > 0; \ \forall f \in L^2(I), \ \|Tf\|_2 \leq \varepsilon \|f\|_2 + C_\varepsilon \|f\|_1.$$

$\boxed{8}$ Let n be an integer with $n \geq 2$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ |x| < 1\}$, and $\overline{\Omega}$ be its closure. Let $C^2(\overline{\Omega})$ be the set of all real valued C^2 functions on Ω such that all partial derivatives up to order 2 can be extended to $\overline{\Omega}$ continuously. Assume that $f \in C^2(\overline{\Omega})$. For any $\varepsilon > 0$, let $u_\varepsilon \in C^2(\overline{\Omega})$ be a solution of

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon &= f, \qquad x \in \Omega, \\ u_\varepsilon &= 0, \qquad x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

where $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

(i) Show that there exist C_1, $C_2 > 0$ independent of ε such that

$$\sqrt{\varepsilon}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{and} \quad \varepsilon \|\Delta u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

(ii) Prove that $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|u_\varepsilon - f\|_{L^2(\Omega)} = 0$.

$\boxed{9}$ Define the set X of real-valued functions by

$$X = \left\{ u \in C^2\big((0,1)\big) \cap C\big([0,1]\big) \;\middle|\; u(0) = 0,\ u(1) = 1,\ \int_0^1 \left(xu'(x)\right)^2 dx < \infty \right\}$$

and for $u \in X$ consider the following functional:

$$J[u] = \int_0^1 e^{-x} \left(2\left(u(x)\right)^2 + \frac{9}{2} x^2 \left(u'(x)\right)^2 \right) dx.$$

Answer the following questions.

(1) Let $C_0^\infty\big((0,1)\big)$ denote the space of all real-valued infinitely differentiable functions with support in the open interval $(0,1)$. For $u \in X$ and $\varphi \in C_0^\infty\big((0,1)\big)$ compute

$$\frac{\delta J}{\delta u}(u;\varphi) := \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{J[u + \varepsilon\varphi] - J[u]}{\varepsilon}.$$

(2) Find in series form all $u \in X$ that satisfy the following condition:

$$\frac{\delta J}{\delta u}(u;\varphi) = 0 \quad \text{whenever} \quad \varphi \in C_0^\infty\big((0,1)\big).$$

$\boxed{10}$ Let $\mathbf{N}$ be the set of nonnegative integers and $B = \{x_1 \cdots x_n \mid x_1, \ldots, x_n \in \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, n \geq 0\}$ be the set of finite strings of characters $\mathtt{a}$ and $\mathtt{b}$. Let us write ε to denote the null string and x^m to denote the string of m copies of the character x. Given a string $w \in B$, we write $|w|$ for the length of w and $|w|_{\mathtt{a}}$ for the number of occurrences of $\mathtt{a}$ in w.

Let us inductively define a function $g : B \times B \to B$ as follows.

$$\begin{aligned}
g(\varepsilon, u) &= u \\
g(\mathtt{a}w, u) &= g(w, u\mathtt{a}) \\
g(\mathtt{ba}w, u) &= u\mathtt{ab}w \\
g(\mathtt{bb}w, u) &= g(\mathtt{b}w, \mathtt{b}u) \\
g(\mathtt{b}, u) &= \mathtt{b}u
\end{aligned}$$

Also, define a function $f : B \to B$ by $f(w) = g(w, \varepsilon)$.

Suppose $1 \leq k < n$. Letting $B_{n,k} = \{w \in B \mid |w| = n, |w|_{\mathtt{a}} = k\}$, show that the following equation holds.

$$\{f^i(\mathtt{b}^{n-k}\mathtt{a}^k) \mid i \in \mathbf{N}\} = B_{n,k}$$