令和５年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系 入学試験問題

2023 Entrance Examination
Master Course in Mathematics, Division of Mathematics and Mathematical Sciences, Department of Mathematics, Kyoto University

基礎科目 Basic Mathematics

◎　$\boxed{1}$ から $\boxed{6}$ までの全問を解答せよ．
Answer all problems from $\boxed{1}$ to $\boxed{6}$.

◎　解答時間は 3 時間 30 分　である．
The duration of the examination is 3 hours and 30 minutes.

⊗　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculator, cell phones, information devices or watches/clocks during the examination. They have to be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
   Do not open this sheet until it is permitted.

2. 答案用紙・下書用紙のすべてに, 受験番号・氏名を記入せよ．
   Write your name and the applicant number in each answer sheet and scratch pad.

3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い, 問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．
   Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.

4. 1 問を 2 枚以上にわたって解答するときは, つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること.
   If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to another sheet. If you do so, indicate that there is a continuation.

5. 提出の際は, 上から答案用紙 (問題番号順), 下書用紙の順に重ね, 記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること. When turning in, stack answer sheets (in the order of problem numbers) and the draft/calculation sheets from the top. Fold the stack in half with the filled-in side facing outward and turn it in.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい.
   You may take home this problem sheet.

[記号] Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ, 整数の全体の集合, 有理数の全体の集合, 実数の全体の集合, 複素数の全体の集合を表す.
In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English version is after the Japanese version.

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}^3$ の部分集合 D を

$$D = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 - 2yz + 4z^2 \leq 1 \right\}$$

で定める. 積分

$$\iiint_D \log(x^2 + y^2 - 2yz + 4z^2)\, dxdydz$$

の値を求めよ.

$\boxed{2}$ a を実数とし, 実 2×4 行列 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a+1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3-a & 0 \end{pmatrix}$$

と定める. これらを用いて, 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ を $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$ $(x \in \mathbb{R}^4)$ と定義する. このとき,

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)),\ \dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g))$$

を求めよ.

$\boxed{3}$ V を有限次元複素ベクトル空間とし, $S, T : V \to V$ を対角化可能な線形写像で $ST = TS$ が成り立つものとする. $r \geq 2$ を整数, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ を複素数, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ を相異なる複素数とする. 零ベクトルでない V の元 $v, u_1, \ldots, u_r$ は

$$v = u_1 + u_2 + \cdots + u_r$$

を満たし, かつ $1 \leq j \leq r$ なるすべての整数 j について u_j は固有値 λ_j に属する S の固有ベクトルとする. さらに v は固有値 α に属する T の固有ベクトルであり, u_1 は固有値 β に属する T の固有ベクトルとする. このとき $\alpha = \beta$ が成り立つことを示せ.

$\boxed{4}$ $f(x)$ を $x \geq 1$ で定義された実数値連続関数とし, $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$ とする. このとき

$$\lim_{n \to \infty} n \int_1^\infty \frac{\exp\left(-\frac{n}{x}\right) f(x)}{x^2} dx$$

を求めよ.

$\boxed{5}$ x_0 を正の実数とし, $a_m(t) = \dfrac{1}{1+\left(t+\frac{1}{m}\right)^2}$ $(t \geq 0,\ m$ は正の整数$)$ と定める.
このとき常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} x_m'(t) = a_m(t) x_m(t)^{1/2}, \quad t \geq 0, \\ x_m(0) = x_0 \end{cases}$$

の解 $x_m : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ は, $m \to \infty$ のとき, $[0,\infty)$ 上のある連続関数に一様収束することを示せ.

$\boxed{6}$ $\mathbb{R}^3$ の部分集合 X を

$$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 - z^3 = 1\}$$

で定める.

(1) X は $\mathbb{R}^3$ の微分可能部分多様体であることを示せ.

(2) $r \in \mathbb{R}$ について, $H_r = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = r\}$ とする. $X \cap H_r$ が空集合ではない $\mathbb{R}^3$ の 1 次元微分可能部分多様体となるような r の範囲を求めよ.

The English version starts here.

$\boxed{1}$ Define a subset D of $\mathbb{R}^3$ by

$$D = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 - 2yz + 4z^2 \leq 1 \right\}.$$

Find the value of the integral

$$\iiint_D \log(x^2 + y^2 - 2yz + 4z^2)\, dxdydz.$$

$\boxed{2}$ For $a \in \mathbb{R}$, define real 2×4 matrices A, B by

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & a+1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 3-a & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ be the linear maps defined by $f(x) = Ax$, $g(x) = Bx$ $(x \in \mathbb{R}^4)$. Find

$$\dim(\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)),\ \dim(\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Ker}(g)).$$

$\boxed{3}$ Let V be a finite dimensional $\mathbb{C}$-vector space and let $S, T : V \to V$ be diagonalizable linear maps satisfying $ST = TS$. Let $r \geq 2$ be an integer, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ be complex numbers, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ be distinct complex numbers. Let $v, u_1, \ldots, u_r$ be non-zero vectors in V satisfying

$$v = u_1 + u_2 + \cdots + u_r,$$

where u_j is an eigenvector of S corresponding to the eigenvalue λ_j for each integer j satisfying $1 \leq j \leq r$. Assume that v is an eigenvector of T corresponding to the eigenvalue α and u_1 is an eigenvector of T corresponding to the eigenvalue β. Prove that $\alpha = \beta$.

$\boxed{4}$ Let $f(x)$ be a real-valued continuous function on $x \geq 1$, and assume that $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$. Find the limit

$$\lim_{n \to \infty} n \int_1^\infty \frac{\exp\left(-\frac{n}{x}\right) f(x)}{x^2} dx.$$

$\boxed{5}$ Let x_0 be a positive real number, and put $a_m(t) = \dfrac{1}{1 + \left(t + \frac{1}{m}\right)^2}$ ($t \geq 0$, m is a positive integer). Prove that the solution $x_m : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ of the initial value problem of the ordinary differential equation

$$\begin{cases} x_m'(t) = a_m(t) x_m(t)^{1/2}, & t \geq 0, \\ x_m(0) = x_0 \end{cases}$$

converges uniformly to a continuous function on $[0, \infty)$ as $m \to \infty$.

$\boxed{6}$ Consider the subset X of $\mathbb{R}^3$ defined by

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^4 + y^4 - z^3 = 1\}.$$

(1) Prove that X is a differentiable submanifold of $\mathbb{R}^3$.

(2) For $r \in \mathbb{R}$, set $H_r = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = r\}$. Determine the range of r for which $X \cap H_r$ is a non-empty 1-dimensional differentiable submanifold of $\mathbb{R}^3$.