令和 5 年度　京都大学大学院理学研究科 数学・数理解析専攻

数学系 入学試験問題

2023 Entrance Examination
Master Course in Mathematics, Division of Mathematics and Mathematical Sciences，Graduate School of Science, Kyoto University

専門科目 Advanced Mathematics

◎　9 題の問題 $\boxed{1}$～$\boxed{9}$ のうちの 2 題を選択して解答せよ．選択した問題番号を選択票に記入すること．
Select and answer 2 problems out of the 9 problems $\boxed{1}$～$\boxed{9}$. Write the problem numbers you chose on the selection sheet.

◎　解答時間は 2 時間 30 分 である．
The duration of the examination is 2 hours and 30 minutes.

◎　問題は日本語および英語で書かれている．解答は日本語または英語どちらかで書くこと．
The problems are given both in Japanese and in English. The answers should be written either in Japanese or in English.

◎　参考書・ノート類・電卓・携帯電話・情報機器・時計等の持ち込みは 禁止 する．指定された荷物置場に置くこと．
It is not allowed to refer to any textbooks, notebooks, calculators, cell phones, information devices or clocks and watches during the examination. They have to be kept in the designated area.

［注意］ Instructions

1. 指示のあるまで問題冊子を開かないこと．
   Do not open this sheet until instructed to do so.
2. 答案用紙・下書用紙のすべてに，受験番号・氏名を記入せよ．
   Write your name and applicant number in each answer sheet and draft/calculation sheet.
3. 解答は問題ごとに別の答案用紙を用い，問題番号を各答案用紙の枠内に記入せよ．

Use a separate answer sheet for each problem and write the problem number within the box on the sheet.

4. 1問を2枚以上にわたって解答するときは，つづきのあることを用紙下端に明示して次の用紙に移ること．
If you need more than one answer sheet for a problem, you may continue to the next sheet. If you do so, indicate clearly at the bottom of the page that there is a continuation.

5. 提出の際は，上から選択票，答案用紙 (問題番号順)，下書用紙の順に重ね，記入した面を外にして一括して二つ折りにして提出すること．
When handing your exam to the proctor, stack your selection sheet and answer sheets (in the order of question numbers) followed by the draft/calculation sheets. Fold the stack in half with the filled-in side facing outward.

6. この問題冊子は持ち帰ってよい．
You may keep this problem sheet.

［記号］ Notation

以下の問題で $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ はそれぞれ，整数の全体，有理数の全体，実数の全体，複素数の全体を表す．In the problems, we denote the set of all integers by $\mathbb{Z}$, the set of all rational numbers by $\mathbb{Q}$, the set of all real numbers by $\mathbb{R}$ and the set of all complex numbers by $\mathbb{C}$.

The English version is after the Japanese version.

$\boxed{1}$ nを正整数とし，$\zeta = e^{\pi\sqrt{-1}/n}$ を 1 の原始$2n$乗根とする．整数$0 \leq a, b \leq 2n-1$ に対し，2 次複素正方行列 $X_{a,b}$ を以下のように定める．

$$X_{a,b} = \begin{pmatrix} \zeta^a & 0 \\ 0 & \zeta^b \end{pmatrix}.$$

また，2 次複素正方行列 S を以下のように定める．

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

一般線形群 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ の部分群 G を，$X_{a,b}$ $(0 \leq a, b \leq 2n-1)$ および S で生成された群として定める．

(1) G に含まれる位数 2 の元の個数を求めよ．

(2) $\{g^2 \mid g \in G\}$ で生成された G の部分群を H とおく．$[G : H]$ を求めよ．

(3) G の部分群 $K \subset G$ であって，$[G : K] = 2$ となるものの個数を求めよ．

$\boxed{2}$ 複素数係数 2 変数多項式環 $\mathbb{C}[X, Y]$ の元 F に対して剰余環 $\mathbb{C}[X, Y]/(F)$ を R とおく．x, y を X, Y の R での剰余類とし，$\mathfrak{m} = xR + yR$ とおき，これによる局所化を $R_{\mathfrak{m}}$ とおく．

(1) 2 以上の整数 a, b を用いて $F(X, Y) = X^a + Y^b$ と書けるとき，$\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ は単項イデアルではないことを示せ．

(2) $F(0, 0) = 0$ かつ $\left(\left(\dfrac{\partial F}{\partial X}\right)(0, 0), \left(\dfrac{\partial F}{\partial Y}\right)(0, 0)\right) \neq (0, 0)$ であるとき，$\mathfrak{m}R_{\mathfrak{m}}$ は単項イデアルであることを示せ．

$\boxed{3}$ $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ とする．$S^2 \times S^2$ の部分集合 M を

$$M = \left\{((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \in S^2 \times S^2 \mid x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = 0,\ x_1 + y_1 = 0\right\}$$

と定める．

(1) M は $S^2 \times S^2$ の C^∞ 級部分多様体であることを示せ．

(2) M は向き付け可能であることを示せ．

(3) 写像 $f : M \to S^2$ を

$$f\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = (y_1, y_2, y_3)$$

と定める．M の向きをどのように選んでも，S^2 上の任意の二次微分形式 ω に対して，

$$\int_M f^*\omega = 0$$

となることを示せ．

$\boxed{4}$ $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし，点 $a \in S^1$ を一つ取って固定する．$S^1 \times S^1$ に

$$(a, p) \sim (p, a), \quad (p \in S^1)$$

で生成される同値関係 $\sim$ を与える．商空間

$$X = (S^1 \times S^1)/\sim$$

の整数係数ホモロジー群を計算せよ．

$\boxed{5}$ 関数 $f:[0,\infty)\to(-1,\infty)$ は連続であり，

$$g(x)=\sup_{y\in[x,x+1]}|f(y)-f(x)| \quad (x\geq 0)$$

とおくとき，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=0, \quad \int_0^\infty\{|f(x)|+g(x)\}\,dx<\infty$$

を満たすと仮定する．このとき，極限

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\infty}\left\{1+f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^{1/n}$$

を求めよ．

$\boxed{6}$ $L^1([0,\infty))$ を $[0,\infty)$ 上の可積分関数全体のなす実Banach空間とし, $f\in L^1([0,\infty))$ に対して

$$||f||_1=\int_0^\infty|f(x)|dx$$

とする． $f\in L^1([0,\infty))$ に対して $H_f:L^1([0,\infty))\to L^1([0,\infty))$ を

$$(H_fg)(x)=\int_0^\infty f(x+y)g(y)dy$$

と定める.

(1) $||H_f||\leq||f||_1$ を示せ. ここで $||H_f||$ は H_f の作用素ノルムである.

(2) H_f はコンパクト作用素であることを示せ.

$\boxed{7}$ $B := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $\bar{B} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ で ∂B は B の境界とする.

(1) 実数値関数 $f \in C^1([0, 1])$ が $f(1) = 0$ を満たしているとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\int_0^1 f(r)^2 r dr \leq c_1 \int_0^1 f'(r)^2 r dr.$$

ここで, $c_1 > 0$ は f に依存しない定数である.

(2) 実数値関数 $f \in C^1(B) \cap C(\bar{B})$ は ∂B 上で $f = 0$ を満たしており, 全ての 1 階偏導関数は $\bar{B}$ 上の連続関数に拡張できるものとする. このとき, 次が成り立つことを示せ.

$$\int_B f(x)^2 dx \leq c_2 \int_B \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \right)^2 \right\} dx.$$

ここで, $c_2 > 0$ は f に依存しない定数である.

(3) 実数値関数 $u \in C^2((0, \infty) \times B) \cap C([0, \infty) \times \bar{B})$ は次を満たすものとする.

- ◦ $u(t, x) = 0, \ (t \in (0, \infty), \ x \in \partial B)$.
- ◦ 各 $t > 0$ で $\dfrac{\partial}{\partial t} u(t, \cdot), \ \dfrac{\partial}{\partial x_1} u(t, \cdot), \ \dfrac{\partial}{\partial x_2} u(t, \cdot), \ \dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(t, \cdot)$ は, $\bar{B}$ 上の連続関数に拡張できる.

このとき, もし

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t, x) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(t, x) = 0, \ (t \in (0, \infty), \ x \in B)$$

が成り立つならば, 全ての $t > 0$ に対して

$$\int_B u(t, x)^2 dx \leq c_3 e^{-c_4 t}$$

が成り立つことを示せ. ここで, $c_3 > 0$ は t に依存しない定数で, $c_4 > 0$ は t と u に依存しない定数である.

$\boxed{8}$ $0 < a < 1$ とし，$t \in \mathbb{R}$ の関数 $(r(t), \theta(t)) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ に対する以下の常微分方程式を考える：

$$\dot{r} = r \sin\theta, \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{r^2} + \cos\theta - a,$$

ここで，ドット "$\cdot$" は t に関する微分を表す．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) この常微分方程式の平衡点を求め，それらの線型安定性を判別せよ．

(2) もし $(r(t), \theta(t))$ がこの常微分方程式の解ならば $(r(-t), -\theta(-t))$ も解となることを示せ．

(3) この常微分方程式の解 $(r(t), \theta(t))$ で，ある平衡点 $(\hat{r}, \hat{\theta})$ に対して次の二条件を満たすものが存在することを示せ:

(a) $\lim_{t\to\infty}(r(t), \theta(t)) = \lim_{t\to-\infty}(r(t), \theta(t)) = (\hat{r}, \hat{\theta})$.

(b) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $(r(t), \theta(t)) \neq (\hat{r}, \hat{\theta})$.

$\boxed{9}$ n を非負整数とし，$A = \{i \mid 0 \leq i \leq n\}$ と定める．$a_0, a_1, \ldots, a_n$ を，任意の $i \in A$ について $i \leq a_i$ をみたすような A の元の列とするとき，A 上の二項関係を $\sim = \{(i, a_i) \mid 0 \leq i \leq n\}$ で定める．また $\sim^*$ を，$\sim$ を含む最小の同値関係とする．

プログラム G を次のように定める．ただし，プログラム中 $U, I, J, X_0, \ldots, X_n$ はプログラム変数，$Y \leftarrow e$ はプログラム変数 Y への式 e の値の代入である．

$$
G \quad \equiv \quad
\begin{array}{l}
U \leftarrow 1; \\
\textbf{while } U \neq 0 \textbf{ do} \\
\quad U \leftarrow 0; \\
\quad \textbf{for } I = 0 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad J \leftarrow X_I; \\
\quad\quad \textbf{if } X_I \neq X_J \textbf{ then } U \leftarrow U + 1 \textbf{ endif}; \\
\quad\quad X_I \leftarrow X_J; \\
\quad \textbf{done} \\
\textbf{done}
\end{array}
$$

(1) プログラム G の実行前の事前条件として $\bigwedge_{i=0}^{n} X_i = a_i$ が成り立つとき，以下に定める条件 Φ_1 が G 中の while ループの不変条件であることを示せ．

$$\Phi_1 \ \equiv\ \forall i \in A.\big(i \leq X_i \land (X_i = i \Leftrightarrow i = a_i)\big)$$

(2) (1) と同じ事前条件の下で，以下の性質を満たす条件 Φ を与えよ．

(a) Φ は G 中の while ループの不変条件である．

(b) $\Phi \land U = 0$ ならば $\forall i, j \in A.(X_i = X_j \Leftrightarrow i \sim^* j)$ が成り立つ．

The English version starts here.

$\boxed{1}$ Let n be a positive integer. Let $\zeta = e^{\pi\sqrt{-1}/n}$ be a primitive $2n$-th root of unity. For integers $0 \leq a, b \leq 2n-1$, define a complex 2×2 matrix $X_{a,b}$ as follows.

$$X_{a,b} = \begin{pmatrix} \zeta^a & 0 \\ 0 & \zeta^b \end{pmatrix}.$$

Moreover, we define a complex 2×2 matrix S as follows.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let G be the subgroup of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ generated by $X_{a,b}$ $(0 \leq a, b \leq 2n-1)$ and S.

(1) Calculate the number of elements of order 2 in G.

(2) Let H be the subgroup of G generated by $\{g^2 \mid g \in G\}$. Calculate $[G : H]$.

(3) Calculate the number of subgroups K of G satisfying $[G : K] = 2$.

$\boxed{2}$ Let F be an element of the polynomial ring $\mathbb{C}[X, Y]$ over $\mathbb{C}$ with two variables X, Y. Let R be the residue ring $\mathbb{C}[X, Y]/(F)$. Let x, y be the residue classes of X, Y in R, respectively, and $\mathfrak{m} = xR + yR$. Let $R_\mathfrak{m}$ be the localization of R at $\mathfrak{m}$.

(1) Assume that F is written as $F(X, Y) = X^a + Y^b$ for some integers a, b greater than or equal to 2. Prove that the ideal $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ is not principal.

(2) Assume that $F(0, 0) = 0$ and $\left(\left(\frac{\partial F}{\partial X}\right)(0,0), \left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)(0,0)\right) \neq (0, 0)$ are satisfied. Prove that $\mathfrak{m}R_\mathfrak{m}$ is a principal ideal.

$\boxed{3}$ We set $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$. We define a subset M of $S^2 \times S^2$ by

$$M = \left\{((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) \in S^2 \times S^2 \mid x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,\, x_1 + y_1 = 0\right\}.$$

(1) Show that M is a C^∞-submanifold of $S^2 \times S^2$.

(2) Show that M is orientable.

(3) We define a map $f : M \to S^2$ by

$$f\left((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)\right) = (y_1, y_2, y_3).$$

Show that for any choice of an orientation on M, we have

$$\int_M f^*\omega = 0$$

for any 2-form ω on S^2.

$\boxed{4}$ Let $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. We fix a point $a \in S^1$. We consider an equivalence relation $\sim$ on $S^1 \times S^1$ generated by

$$(a, p) \sim (p, a), \quad (p \in S^1).$$

Let

$$X = (S^1 \times S^1)/\sim$$

be the quotient space. Compute the homology groups of X with integer coefficients.

$\boxed{5}$ Let $f : [0, \infty) \to (-1, \infty)$ be a continuous function. Set

$$g(x) = \sup_{y \in [x, x+1]} |f(y) - f(x)| \quad (x \geq 0)$$

and suppose that

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0 \quad \text{and} \quad \int_0^\infty \{|f(x)| + g(x)\}\, dx < \infty$$

are satisfied. Find the following limit:

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left\{1 + f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}^{1/n}.$$

$\boxed{6}$ Let $L^1([0, \infty))$ be the real Banach space of integrable functions over $[0, \infty)$, and for $f \in L^1([0, \infty))$, we define

$$||f||_1 = \int_0^\infty |f(x)| dx.$$

For $f \in L^1([0, \infty))$, we define $H_f : L^1([0, \infty)) \to L^1([0, \infty))$ by

$$(H_f g)(x) = \int_0^\infty f(x + y) g(y) dy.$$

(1) Show that $||H_f|| \leq ||f||_1$, where $||H_f||$ is the operator norm of H_f.

(2) Show that H_f is a compact operator.

$\boxed{7}$ Let $B := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 < 1\}$, $\bar{B} := \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ and ∂B be the boundary of B.

(1) Prove that if a real valued function $f \in C^1([0,1])$ satisfies $f(1) = 0$, then

$$\int_0^1 f(r)^2 r dr \leq c_1 \int_0^1 f'(r)^2 r dr$$

holds, where $c_1 > 0$ is a constant independent of f.

(2) Let $f \in C^1(B) \cap C(\bar{B})$ be a real valued function such that $f = 0$ on ∂B and all of the first derivatives extend to $\bar{B}$ continuously. Prove that the inequality

$$\int_B f(x)^2 dx \leq c_2 \int_B \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial x_2} f(x) \right)^2 \right\} dx$$

holds with a constant $c_2 > 0$ independent of f.

(3) Let $u \in C^2((0,\infty) \times B) \cap C([0,\infty) \times \bar{B})$ be a real valued function satisfying the following conditions.

- $u(t,x) = 0, \ (t \in (0,\infty), \ x \in \partial B)$.
- For $t > 0$, $\dfrac{\partial}{\partial t} u(t,\cdot)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_1} u(t,\cdot)$, $\dfrac{\partial}{\partial x_2} u(t,\cdot)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} u(t,\cdot)$ extend to $\bar{B}$ continuously.

Prove that if u solves

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} u(t,x) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} u(t,x) = 0, \ (t \in (0,\infty), \ x \in B),$$

then for all $t > 0$, the inequality

$$\int_B u(t,x)^2 dx \leq c_3 e^{-c_4 t}$$

holds, where $c_3 > 0$ is a constant independent of t, and $c_4 > 0$ is a constant independent of t and u.

$\boxed{8}$ Let $0 < a < 1$. Consider the following system of ordinary differential equations for a function $(r(t), \theta(t)) \in (0, \infty) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ of $t \in \mathbb{R}$:

$$\dot{r} = r \sin\theta, \qquad \dot{\theta} = \frac{1}{r^2} + \cos\theta - a,$$

where the dot "$\cdot$" means the differentiation with respect to t. Answer the following questions.

(1) Find equilibria of this system, and determine their linear stability.

(2) Prove that if $(r(t), \theta(t))$ is a solution of this system, then $(r(-t), -\theta(-t))$ is also a solution.

(3) Prove that there exists a solution $(r(t), \theta(t))$ of this system satisfying the following two conditions for some equilibrium $(\hat{r}, \hat{\theta})$:

(a) $\lim_{t\to\infty}(r(t), \theta(t)) = \lim_{t\to-\infty}(r(t), \theta(t)) = (\hat{r}, \hat{\theta})$.

(b) For any $t \in \mathbb{R}$, $(r(t), \theta(t)) \neq (\hat{r}, \hat{\theta})$.

$\boxed{9}$ Let n be a nonnegative integer and define $A = \{i \mid 0 \le i \le n\}$. Suppose $a_0, a_1, \ldots, a_n$ is a sequence of elements of A such that $i \le a_i$ for every $i \in A$. Let us define a binary relation $\sim$ over A by $\sim = \{(i, a_i) \mid 0 \le i \le n\}$. We denote by $\sim^*$ the smallest equivalence relation containing $\sim$.

We consider the following program G. In the program, $U, I, J, X_0, \ldots, X_n$ are program variables and $Y \leftarrow e$ is a substitution that assigns the value of e to Y.

$$
G \quad \equiv \quad
\begin{array}{l}
U \leftarrow 1; \\
\textbf{while } U \neq 0 \textbf{ do} \\
\quad U \leftarrow 0; \\
\quad \textbf{for } I = 0 \textbf{ to } n \textbf{ do} \\
\quad\quad J \leftarrow X_I; \\
\quad\quad \textbf{if } X_I \neq X_J \textbf{ then } U \leftarrow U + 1 \textbf{ endif}; \\
\quad\quad X_I \leftarrow X_J; \\
\quad \textbf{done} \\
\textbf{done}
\end{array}
$$

(1) Suppose the precondition $\bigwedge_{i=0}^{n} X_i = a_i$ holds before the execution of the program G. Show that the condition Φ_1 given below is a loop invariant for the while loop in G.

$$\Phi_1 \equiv \forall i \in A. \big(i \le X_i \wedge (X_i = i \Leftrightarrow i = a_i)\big)$$

(2) Assuming the same precondition as in (1), give a condition Φ that satisfies the following properties.

(a) Φ is a loop invariant for the while loop in G.

(b) $\Phi \wedge U = 0$ implies $\forall i, j \in A. (X_i = X_j \Leftrightarrow i \sim^* j)$.