京　都　大　学

数学 I

◎ $\boxed{1}$から$\boxed{5}$までの全問を解答せよ．但し，数理解析専攻志願者は$\boxed{2}$または$\boxed{5}$のかわりに$\boxed{A}$を解答してもよい．数学専攻としては，$\boxed{A}$は評価しないので，注意すること．

$\boxed{1}$ 数直線 R 上の実数値関数の列 $f_k(t)$ $(k = 1, 2, \cdots)$ について次を仮定する．

1）任意の $t \in \mathrm{R}$ について $\{f_k(t)\}_{k=1,2,\cdots}$ はコーシー列である．

2）任意の正数 ϵ 及び $t \in \mathrm{R}$ に対し，ある自然数 k_0 が存在して，$k \geq k_0$ となるすべての自然数 k に対して

$$\left| f_k(t+\epsilon) - f_k(t) \right| < \epsilon$$

が成立する．

このとき，$f(t) = \lim_{k \to \infty} f_k(t)$ で定義される関数は R で連続であることを示せ．

$\boxed{2}$ 次の命題は正しいか，正しければ証明を，誤りであれば反証あるいは反例をあたえよ．

（1） 弧状連結な位相空間 X と対角集合 $\Delta = \{(x, x) \in X \times X\}$ に対して，差集合 $X \times X - \Delta$ は弧状連結である．

（2） $SL(2, \mathrm{R}) = \{ A \mid A$ は R^2の線形変換，$\det A = 1 \}$，$S = \{ \binom{x}{y} \in \mathrm{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1 \}$ とする．S を S に写す $SL(2, \mathrm{R})$ の元全体のなす $SL(2, \mathrm{R})$ の部分集合は R と同相である．

$\boxed{3}$ C 上の n 次正方行列の全体を $M_n(\mathrm{C})$ とし，$S \in M_n(\mathrm{C})$ の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ で表す．$M_n(\mathrm{C})$ から $M_n(\mathrm{C})$ への線形写像 ϕ_S を

$$\phi_S(X) = SX + XS$$

で定義する.

1) 正則行列 $M \in M_n(\mathrm{C})$ に対して ϕ_S と $\phi_{MSM^{-1}}$ は同じ固有値を持つことを示せ.

2) ϕ_S の固有値は $\alpha_i + \alpha_j \quad (1 \leq i, j \leq n)$ であることを示せ.

$\boxed{4}$ 全平面 C 上で正則な関数 $f(z)$ の実部, 虚部をそれぞれ $u(z)$, $v(z)$ とする.

$$|u(z)| > |v(z)| \qquad (z \in \mathrm{C})$$

ならば $f(z)$ は定数であることを示せ.

$\boxed{5}$ G を群, H をその部分群とする. いま, 群 H' と全射準同型 $\varphi : H \to H'$ とを与えて次の問題を考える: H' を部分群として含む群 G' 及び準同型写像 $\psi : G \to G'$ で $\psi|_H = \varphi$ となるものの対 (G', ψ) が存在するか否か.

(1) G がアーベル群なら (G', ψ) が存在することを示せ.

(2) G が4次対称群 S_4 で H が $\{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ の時に, φ と H' を適当に選べば, (G', ψ) は存在しないことを示せ.

$\boxed{A}$ 次の条件を満たす, $\{x \in \mathrm{R} \mid x > 0\}$ で無限回微分可能な実数値関数 $f(x)$ を求めよ:

任意の正数 a に対し, 適当な実数 b と c があって,

$$f(ax) = bf(x) + cx \qquad (x > 0)$$

が成立する.

数学 II（専門科目）

◎ 問題は 1 2 ある.
その内, 分野群［ a ］の問題は $\boxed{1}$ から $\boxed{7}$ までの７題,［ b ］の問題は $\boxed{8}$ の１題,［ c ］,［ d ］の問題はそれぞれ２題であって,
［ c ］ $\boxed{9}$ $\boxed{10}$
［ d ］ $\boxed{11}$ $\boxed{12}$

◎ この 1 2 問題中, 3 問題 を選択せよ.
但し, 数学専攻としては, 分野群［ c ］,［ d ］の問題は評価しないので注意すること.

$\boxed{1}$ 部分群を丁度５個もつような有限群 G の構造を決定せよ（但し, G 自身及び $\{1\}$ も部分群として数える）.

$\boxed{2}$ 可換体 K 上の多元環（ K-algebra ）R について, $\mathrm{Aut}(R)$ は K 上の多元環としての自己同型群を表すものとする. x は K 上の変数として, 次のことを示せ.

（１）

$$GL(2,K) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ に対して, 写像 } x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d} \text{ を対応させる}$$

ことによって,

$$\mathrm{Aut}(K(x)) \cong PGL(2,K) = GL(2,K) \Big/ K^* \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

（２）

$$\mathrm{Aut}\left(K\left[x, \frac{1}{x(x-1)}\right]\right) \cong S_3 \qquad (\text{ 3 次対称群 }).$$

（（１）を仮定して解いてもよい.）

$\boxed{3}$ X を R^{n+1} の n 次元 C^∞ 級（正規）部分多様体, $v : X \to S^n = \{a \in \mathrm{R}^{n+1} \mid \|a\| = 1\}$ は, 全ての $x \in X$ について, $v(x)$ が x における X の接平面 T_xX と直交するものとする.

$$f : X \times X \to \mathrm{R}^{n+1}$$

を $f(x, y) = x + y$ で定義するとき, f の特異点の集合を v を使って表せ.

$\boxed{4}$

$$S^3 = \{(x, x') \in \mathrm{C}^2 \mid |x|^2 + |x'|^2 = 1\}$$

$$X = \{((x, x'), (y, y')) \in S^3 \times S^3 \mid x = 0 \text{ 又は } y = 0\}$$

とする.

（１） X は弧状連結かつ単連結であることを示せ.

（２） X の整係数ホモロジー群を求めよ.

（３） $\pi_3(X)$ を求めよ.

（４） $\pi_3(S^2 \vee S^2)$ を求めよ.（ただし, $S^2 \vee S^2$ は２次元球面 S^2 の１点和を表す.）

（ヒント： Hopf のファイバー写像 $h : S^3 \to S^2$ の積 $h \times h$ を考えよ.）

$\boxed{5}$ T, T_n $(n = 1, 2, \cdots)$ はいずれも Banach 空間 X から Banach 空間 Y への有界線型作用素で, 各 $x \in X$ において, $\lim_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$ を満たしている. 更に, X から Y へのコンパクトな有界線型作用素 K が存在して, すべての $x \in X$ とすべての n に対して, $\|T_n x\| \le \|Kx\|$ が成り立つとする. このとき, $\lim_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$ であることを示せ.

$\boxed{6}$ $R > 1$ に対し, 領域 D, 円 C を

$$D = \{ z \in \mathrm{C} \mid 1 < |z| < R \}, \qquad C = \{ z \in \mathrm{C} \mid |z| = (1 + R)/2 \}$$

とする．このとき，D 上正則な任意の関数 $f(z)$ に対し

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le M \int\int_D |f(z)|dxdy \qquad (z = x + \sqrt{-1}y)$$

が成立するように（R のみに依存する）定数 M がとれることを示せ．更に，$R \to \infty$ のとき $M \to 0$ と出来ることを示せ．

$\boxed{7}$ $f(x) \in L^2(-\infty, \infty)$ のとき，

$$g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x-y)dx$$

は y の連続関数であることを示せ．

$\boxed{8}$ 次の 2 問のうちいずれか 1 問を選択せよ．（2 問解答した場合は不利な扱いを受ける．）

$\boxed{8\text{-}1}$ $f(x,\lambda)$ は R^2 から R への C^∞ 写像で，$(x,\lambda)=(0,0)$ において次の条件をみたすものを考える：

$$f(0,0)=0, \quad \frac{\partial}{\partial x}f(0,0)=-1, \quad 2\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(0,0)+3\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0)\right\}^2>0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(0,0)\frac{\partial}{\partial \lambda}f(0,0)+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial\lambda}f(0,0)<0.$$

$f_\lambda(x)=f(x,\lambda)$ の n 周期点 y（ただし，n は自然数）とは

$$(f_\lambda)^n(y)=y, \qquad (f_\lambda)^k(y)\ne y \quad (0<k<n)$$

をみたすもののことである．このとき $(x,\lambda)=(0,0)$ の十分小さな近傍で次が成り立つことを示せ．

（1） λ を固定するごとに f_λ の 1 周期点はただひとつ存在する．

（2） $\lambda \le 0$ では f_λ の 2 周期点は存在しないが，$\lambda>0$ では f_λ の 2 周期点はちょうどふたつ存在する．

$\boxed{8\text{-}2}$ $x-$軸上の区間 $I=\{x \mid 0<x<1\}$ で次のような熱方程式の初期値·境界値問題を考える.

$$\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \qquad (x,t)\in I\times(0,T) \tag{1}$$
$$u(x,0)=f(x) \qquad x\in\overline{I} \tag{2}$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0 \qquad 0<t\leq T \tag{3}$$

但し, T は正の定数で, 初期条件 $f(x)$ は $f(x)\in C_0^\infty(I)$ とする. いま, $0\leq x\leq 1$ を N 等分, $0\leq t\leq T$ を M 等分して $\Delta x=1/N$, $\Delta t=T/M$ と定め, $\overline{I}\times[0,T]$ 上の格子点 $P_{j,k}=(j\Delta x,k\Delta t)$ $(0\leq j\leq N, 0\leq k\leq M)$ を考え, Crank-Nicolson 法によって (1)-(3) を差分近似する. 即ち, $P_{j,k}$ における数値解を $u_{j,k}$ と表すとき,

$$\frac{u_{j,k+1}-u_{j,k}}{\Delta t}=\frac{1}{2}\left\{\frac{u_{j-1,k+1}-2u_{j,k+1}+u_{j+1,k+1}}{\Delta x^2}\right.$$
$$\left.+\frac{u_{j-1,k}-2u_{j,k}+u_{j+1,k}}{\Delta x^2}\right\} \qquad \begin{pmatrix}1\leq j\leq N-1\\ 0\leq k\leq M-1\end{pmatrix} \tag{4}$$
$$u_{j,0}=f(j\Delta x) \qquad 1\leq j\leq N-1 \tag{5}$$
$$u_{0,k}=u_{N,k}=0 \qquad 0\leq k\leq M \tag{6}$$

によって (1)-(3) を近似する. $\lambda=\Delta t/\Delta x^2$ とするとき以下の設問に答えよ.

(1) (4)-(6) を未知数 $\{u_{j,k}\}_{1\leq j\leq N-1,1\leq k\leq M}$ に関する連立方程式と考えたとき, 任意の $\lambda>0$ に対して, この方程式が一意可解であることを示せ.

(2) $0<\lambda\leq 1$ のとき,

$$\max_{0\leq j\leq N}|u_{j,k}|\leq\max_{0\leq j\leq N}|f(j\Delta x)| \qquad (1\leq k\leq M)$$

が成立することを示せ.

(3) Crank-Nicolson の差分スキーム (4)-(6) は, Δx, Δt の大きさに関わらず L^2-安定なスキームであることを示せ. 必要があれば, $n\times n$ 行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の固有値が $\mu_k = 2\cos(k\pi/(n+1))$ （$1 \leq k \leq n$）で与えられることを用いてもよい.

$\boxed{9}$

i) 区間 $[-1,1]$ に値をとる確率変数 X_i $(i=1,2,3)$ に対して, " Bell の不等式 " として知られている次の不等式を証明せよ.

$$1 - \mathbb{E}(X_1X_2) \geq |\mathbb{E}(X_1X_3) - \mathbb{E}(X_2X_3)|.$$

ただし, $\mathbb{E}(X)$ は, 確率変数 X の期待値である.

ii) α, β が $\cos^2\beta < \cos^2\alpha < |\cos\beta|$ を満たすとき, $\{-1,1\}$ に値をとる 3 つの確率変数で, 行列

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \cos\beta & -\cos\beta \\ \cos\beta & 1 & -\cos 2\alpha \\ -\cos\beta & -\cos 2\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

を共分散行列に持つものは存在しないことを証明せよ.

iii) 上記 i), ii) を用いて, 量子論と古典論の関係を論ぜよ.

$\boxed{10}$ 4 次元の自由 Dirac 場を正準量子化し, 4 次元反交換関係を求めよ. 記号法は, 標準的なものを用いるのが望ましいが, 独自のものを使ってもよい. いずれの場合も明確に定義してから用いること.

$\boxed{11}$

$S = \{2^i3^j \mid i,j : 非負整数\}$ とする. 非負整数 n が与えられたとき, S の（$<$に関して）最初の n 個の元を（小さい順に）n に比例した時間

と記憶容量で計算し出力するプログラムを書き，計算時間と記憶容量の条件を満たすことを説明せよ．プログラムは，Pascal または C または FORTRAN で書き，整数演算のみを用いること．

$\boxed{12}$ 以下のプログラムで現れる変数はすべて整数型とする．

(a)

$$F(x, y) \longleftarrow \text{if} \quad p(x) \quad \text{then} \quad y \quad \text{else} \quad F(g(x), h(y))$$

なる再帰プログラムが計算する関数を $f(x, y)$ とすると，

$$f(x, h(y)) = h(f(x, y))$$

が任意の x, yについて成り立つことを証明せよ．ここで，p, g, h は，計算可能な既知な関数で，p は真偽値を値域とし，g, h は整数値を値域とする．ただし，h は定値関数（コンスタント）ではない．

(b)　上の（a）の結果から，Pascal のプログラム

$$\text{while} \quad p(x) \quad \text{then do begin} \quad x := g(x);\ y := h(y) \quad \text{end}$$

について，どんな性質が導かれるかを示し，その理由を説明せよ．

外国語

◎　問題は，$\boxed{E}$，$\boxed{D}$，$\boxed{F}$，$\boxed{R}$ の　4 題　ある．この 4 問題中，2 問題　を解答せよ．

$\boxed{E}$

次の英文を日本語に直せ．

Spring, 1966, was the golden time of a year that we, the survivors of today, recognize to have been one of the golden ages of