京　都　大　学

数学 I

◎ $\boxed{1}$から$\boxed{5}$までの全問を解答せよ. 但し, 数理解析専攻志願者は$\boxed{3}$のかわりに$\boxed{A}$を解答してもよい. 数学専攻としては, $\boxed{A}$は評価しないので, 注意すること.

$\boxed{1}$ 円周 S^1 から直線 R^1 への連続写像 $f : S^1 \to \mathrm{R}^1$ は全射にも単射にもならないことを示せ。

$\boxed{2}$ 自然数 n に対し、${}^t gg = 1_n$ をみたす整数係数 n 次正方行列 g からなる群を $O_n(\mathrm{Z})$ とする。このとき、$O_n(\mathrm{Z})$ の位数は $2^n \cdot n!$ であることを示せ。

$\boxed{3}$ $\mathcal{C}$ は直線 R 上の連続函数の集まりで、R の 2 点を分離する、すなわち

$$x, y \in \mathrm{R},\ \ x \neq y \implies {}^\exists f \in \mathcal{C},\ \ f(x) \neq f(y)$$

となるものとする。$\{a_n\}$ は有界な実数列であって、すべての $f \in \mathcal{C}$ に対し $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ が存在するものとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ は収束列、すなわち

$${}^\exists a \in \mathrm{R},\quad \lim_{n\to\infty} a_n = a$$

となることを示せ。

$\boxed{4}$ C 上収束する冪級数

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

を考える。

1) $P(z)$ が実軸上でいつも実数値をとるとき、すべての c_n は実数であることを示せ。

2) $P(z)$ が虚軸上でいつも純虚数値をとるとき、係数 c_n の条件を求めよ。

$\boxed{5}$ 複素正方行列 A, B が $AB = BA + B$ を満たすとする。B が零行列でなければ、A は 0 でない固有値を持つことを示せ。

$\boxed{A}$ a, b を共に 0 でなく、a/b が実数とならないような複素数とし、実変数関数　f を

$$f(x,y) = \frac{1}{(ax+by)^2}$$

で定義する。　その時、正数 R に対して、ふたつの逐次積分の差

$$\int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} f(x,y)dx\right)dy - \int_{-R}^{R}\left(\int_{-R}^{R} f(x,y)dy\right)dx$$

を計算せよ。

数学　II（専門科目）

◎　この 12 問題中、3問題　を選択せよ。
但し、数学専攻としては、分野群［c］,［d］の問題は評価しないので注意すること。

$\boxed{1}$ $\mathbb{R}$ を実数の加法群、$\mathbb{Z}_p$ を p 進整数の加法群、G を $\mathbb{R}\times\prod_p \mathbb{Z}_p$（$p$ は全ての素数をわたる直積）とする。$\mathbb{R}$ は実数の通常の位相、$\mathbb{Z}_p$ は p 進位相によって位相群とみて、G は直積位相によって位相群とみる。

整数の加法群 $\mathbb{Z}$ の G への対角埋め込みとして得られる G の部分群を H とする、即ち $H := \{(x,x,x,\cdots)\in G \mid x\in\mathbb{Z}\}$。商群 G/H には商空間としての位相をいれる。このとき、次の（1）－（4）を示せ。

（1）H は G の離散（discrete）部分群である。

（2）G/H はコンパクト位相空間である。

（3）G の部分群 $\mathrm{R} \times \prod_p \{0\}$ の像は G/H の稠密（dense）部分集合である。

（4）G/H は連結位相空間である。

$\boxed{2}$ 複素数体 C 上の 2 変数多項式環 $R = \mathrm{C}[x, y]$ に、n 次巡回群 G が C-algebra 自己同型として作用し、G の生成元 σ の作用が: $\sigma(x) = \zeta^{-1}x$, $\sigma(y) = \zeta^a y$ $(0 < a < n)$ によってあたえられている。但し、$\zeta = e^{2\pi i/n}$ である。

R の G-不変元全体の作る C-subalgebra を R^G、即ち $R^G = \{f \in R \mid \sigma(f) = f\}$ とし、更に $M = \{x^s y^t \mid s, t = 0, 1, \cdots\}$、$M^G = R^G \cap M$ とする。

$M^G-\{1\}$ （1）M^G の部分集合 F に対する次の条件（イ）、（ロ）、（ハ）、（ニ）の間に（イ）$\Longleftrightarrow$（ロ）$\Longrightarrow$（ハ）$\Longrightarrow$（ニ）の関係があることを示せ。

（イ）F は C-algebra として R^G を生成する。

（ロ）F は乗法に関する monoid（単位元をもつ半群）として M^G を生成する。

$M^G-\{1\}$ （ハ）F は M^G の半順序 $(x^s y^t \leq x^{s'} y^{t'} \Longleftrightarrow s \leq s', t \leq t')$ に関する $(M^G-\{1\}$ の$)$ 極小元を全て含む。

（ニ）F の元の数 $|F|$ は 3 以上である。

（2）R^G が 3 個の単項式で C-algebra として生成されるための条件を求めよ。

注 1. (イ) における C-algebra とは単位元を含む C-algebra を意味する。

注 2. $0<a<n$ における a は整数である。

$\boxed{3}$ $\pi : E \to M$ を多様体 M 上の C^∞ 級のベクトル束とし、C^∞ 級の Riemann 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ が E に入っているものとする（即ち、C^∞ 級の切断 $s_1, s_2 : M \to E$ に対し、$\langle s_1(x), s_2(x)\rangle$ は C^∞ 級）。

C^∞ 関数 $f : M \to \mathrm{R}$ に対し、$g : E \to \mathrm{R}$ を $g(v) = \langle v, v\rangle + f \circ \pi(v)$

で定義する。

(1) $c \in \mathrm{R}$ が g の正則値であることと f の正則値であることとは同値であることを示せ。

(2) c を g の正則値とすると、$N = g^{-1}(c)$ は E の部分多様体となるが、$\pi|_N : N \to M$ の特異点集合を求めよ。

但し、一般に多様体の C^∞ 写像 $F : X \to Y$ に対し、$x \in X$ が F の特異点とは、$\mathrm{rank}(DF)_x < \min(\dim X, \dim Y)$ となることで、$y \in Y$ が F の正則値とは $F^{-1}(y)$ が特異点を含まないことである。

$\boxed{4}$ 円周 $S^1 = \{z \in \mathrm{C}; |z| = 1\}$ の写像 $\tau : S^1 \to S^1$ を $\tau(e^{i\theta}) \to e^{-i\theta}$ とおく。空間 $S^1 \times [0,1]$ に同値関係 $(x,0) \sim (\tau(x),1) \quad (x \in S^1)$ を考える。商空間 $K = \left(S^1 \times [0,1]\right) / \sim$ について次の問に答えよ。

(1) K の胞体分割をあたえよ。

(2) K の整係数ホモロジー群 $H_1(K), H_2(K)$ を求めよ。

$\boxed{5}$ A, B を R の Lebesgue 可測集合、χ_A, χ_B をそれぞれの特性関数とする。

$$(P_A u)(x) = \chi_A(x) u(x), \quad (\widehat{P_B u})(\xi) = \chi_B(\xi) \widehat{u}(\xi)$$

により L^2 上の射影作用素 P_A, P_B を定める。次の問に答えよ。

(1) L^2 の元 u に対して次の2つの不等式を示せ。

$$2\pi |(P_B u)(x)|^2 \le |B| \, \|u\|^2, \quad 2\pi \|P_A P_B u\|^2 \le |A| \, |B| \, \|u\|^2.$$

(2) ある $f \in \mathrm{L}^2$, $\|f\| = 1$ に対して、正の数 $\epsilon < \frac{1}{2}$ があって

$$\|(1 - P_A) f\| \le \epsilon, \quad \|(1 - P_B) f\| \le \epsilon$$

が成り立つとする。この時、$|A| \, |B| \ge 2\pi(1 - 2\epsilon)^2$ が成立することを示せ。

但し、$|E|$ は E の Lebesgue 測度を表し、

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-N}^{+N} e^{-ix\xi} f(x) dx, \quad \|u\|^2 = \int_{\mathrm{R}} |u|^2 dx.$$

[6] 次の問（１）（２）に答えよ。

（１）A, Bを $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測集合（A の Lebesgue 測度は有限）、χ_A, χ_Bをそれぞれの特性関数とする。

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(x-y)\chi_B(y)dy$$

がほとんどいたるところ零なら、A または Bの Lebesgue 測度は零であることを証明せよ。

（２）Mを $\mathbf{R}$ の Lebesgue 可測集合で零でない有限な Lebesgue 測度を持つとする。$\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ を $\mathbf{R}$ で稠密な可算集合とする。このとき $Z = \bigcup_{k=1}^{\infty}(x_k + M)$ とおくと差集合 $\mathbf{R} \setminus Z$の測度は零であることを示せ。但し、$x_k + M = \{x_k + t\ ;\ t \in M\ \}$ である。

[7] 複素平面の領域 D(連結) における有界な正則関数全体を $A(D)$ とする。$z \in D$に対して、

$$M_D(z) = \sup\{\ |f'(z)|\ ;\ f \in A(D)\ \}$$

とおく。領域 Dに $M_D(z_0) = 0$ となる点 z_0が存在すると仮定する。このとき次の問に答えよ。

（１）$A(D)$ は定数関数のみから成ることを示せ。

（２）Dにおける非定数関数をφ とする。このとき、任意の複素数αに対して、

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \alpha$$

となる Dの点列 $\{z_n\}$ が存在することを示せ。

（３）全平面 $\mathbf{C}$ 以外で、このような性質をもつ領域 Dの簡単な例をひとつあげよ。

[8] 次の２問のうちいずれか１問を選択せよ。（２問解答した場合は不利な扱いを受ける。）

[8-1] $V(x)$ を微分可能な実数値関数で、$V(x) = 0$ （$|x| \geq {}^{\exists}M > 0$) とする。常微分方程式

$$\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^2 + V(x) + \lambda\right] f(x) = 0 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

に $\mathbf{L}^2$に属する恒等的に零でない解 f が存在するときλを固有値と呼ぶ。λは実数であることは解っているものとして、次の問に答えよ。

（１）固有値λは$[0,\infty)$ には無いことを示し、解 $f \in \mathbf{L}^2$の微分$\frac{d}{dx}f$, $\frac{d^2}{dx^2}f$ も$\mathbf{L}^2$に属することを示せ。
（２）固有値λ_1に対する解をf_1、λ_2に対する解をf_2をとする。$\lambda_1 \neq \lambda_2$なら、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)\overline{f_2(x)}dx = 0$$

を示せ。
（３）固有値λは$(-\infty,0)$ 内には集積しないことを示せ。

$\boxed{8\text{-}2}$ 複素ヒルベルト空間X上の零でない有界な自己共役作用素Aに対し、次の方程式を考える。

$$\frac{d}{dt}u = iAu, \qquad t \in [0,\infty) \qquad \text{（ア）}$$
$$u(0) = u_0 \quad \in X$$

この方程式の差分近似方程式（$\tau > 0$, α: 実数）

$$\frac{1}{\tau}(v_{n+1} - v_n) = iA\Bigl(\alpha v_{n+1} + (1-\alpha)v_n\Bigr), \quad (n = 0,1,2,\cdots) \quad \text{（イ）}$$
$$v_0 = u_0$$

について次の問に答えよ。

（１）（イ）のv_nは一意に定義されることを簡単に説明し、$v_\tau(t) = v_{[t/\tau]}$, $\tau = \frac{1}{k}$ $(k = 1,2,\cdots)$ が$k \to \infty$ のとき（ア）の解$u(t)$にtが有界な範囲で一様に収束することを示せ。但し、$[a]$はaをこえない最大の整数をあらわす。
（２）$\|v_n\| = \|u_0\|$ $(n = 1,2,\cdots)$ が任意の初期値u_0について成立するための必要十分条件は$\alpha = \frac{1}{2}$であることを示せ。

（ヒント：（ア）においては$\frac{d}{dt}\|u\|^2 = 0$ より $\|u(t)\| = \|u_0\|$ が従う。）

$\boxed{9}$ 長さl、単位長さ当り質量μの針金が張力τで両端を固定されている。
（１）この針金の微小振動を記述する運動方程式は、$y(t,x)$ $(0 \leq x \leq l)$を振幅として

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\tau}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

で与えられることを論ぜよ。

(2) この針金が温度Tの熱平衡状態にあるとしたとき、エネルギーの等分配則を仮定して、その中心点の平均自乗振幅を求めよ。但し、次の公式を用いてもよい:

$$\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)^{-2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

$\boxed{10}$ 2階微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-x-2x^3$$

で記述される運動に関して次の問いに答えよ。

1) $\left(x,\frac{dx}{dt}\right)$ −平面での軌跡を考察し、$x(t)$ は周期的であることをしめせ。

2) 振動の振幅 ϵ が小さい時、その周期は $2\pi(1-\frac{3}{4}\epsilon^2+o(\epsilon^2))$ となることを示せ。

$\boxed{11}$ N個の関数記号が、長さ N の文字配列 $name$ と長さ N の (非負) 整数配列 $arity$ によって与えられているとする。どちらも大域的な配列であり、$name[i]$ は i 番目の関数記号の名前を意味し、$arity[i]$ は i 番目の関数の引数の数を意味する。$arity[i]=0$ ならば $name[i]$ は定数を表す. 正の整数 m が与えられたときに、m 個の関数記号からなる式をすべて重複なく出力する手続き $enumerate(m)$ を Pascal または C で書き、その正しさについて説明せよ。但し、効率は問わない。例えば、c が定数、f が $arity$ 1 、 g が $arity$ 2 の関数のとき、

$$f(g(c,g(c,c)))$$

は6個の関数記号からなる式である。なお、式の出力の形式もこれにならうものとする。

$\boxed{12}$ 2つの非負整数 x,y が与えられたとき、$x+y$ を計算するアルゴリズムがあるとする。整数に対しては、以下の4つのプリミティブのみが用いられ、アルゴリズムはこのプリミティブにあらわれるもの以外

の整数定数を含まないとする。

(a) 0 であるかどうかの判定

(b) 整数に 1 加える

(c) 整数から 1 減じる

(d) 整数への代入

（1）　(b) のプリミティブの使用回数は、最低何回か。理由も述べよ。

（2）　具体的に問（1）の回数で $x+y$ を計算するアルゴリズムを記述し、実際にそうであることを示せ。また、アルゴリズムが停止することも示せ。

外国語

◎　問題は, $\boxed{E}$, $\boxed{D}$, $\boxed{F}$, $\boxed{R}$ の　4題　ある. この4問題中, 2問題　を解答せよ.

$\boxed{E}$ 次の文章は、Michael Atiyah の講演記録の一部であり、原文の一部を日本語に直してある。この日本語の部分を英文に書き直せ。但し、$\boxed{\quad}$ の部分にはいるべき一語は、わざと伏せてあるが、全体から判断して適切に補った上で英文にすること。

In the last five years there have been very remarkable applications of ideas from quantum field theory to low-dimensional geometry (i.e., for dimension less than (or equal to) four). In this talk I will give a general introduction to the results about low-dimensional geometry which come from ideas in physics, try to explain the general background in physics, make some speculations and describe some remaining open problems.

h-w physics

In low-dimensional geometry, there is the pioneering work of Donaldson in dimension four and of Jones in dimension three. Of course, many other people have since contributed to this whole area but I want to emphasize that the results are very deep and still mysterious. There are many unanswered problems and it is unclear what is the real relationship between geometry and physics. So this meeting provides an opportunity for discussing and perhaps solving some of these problems.

低次元の幾何学についていくつか述べることからはじめよう。次元が5以上の多様体の理論では、しばらく前から微分可能多様体の構造を分類するよい理論が存在している。いうまでもなく、この分類はホモロジー、特性類、K理論などから来る多様体のいろいろな古典的不変量を用いる。　特に強調すべきことは、これらの不変量が本質的に $\boxed{\quad}$ あるいは加法的であることである。

Now what is the situation in low dimensions? Low dimensions are dimensions two, three and four. Dimension two is the theory of